FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

CURSO DE PREPARACIÓN A LA PRUEBA DE ACCESO A GRADO SUPERIOR

UNIÓN EUROPEA
Fondo Social Europeo
El FSE invierte en tu futuro

CEPA ANTONIO MACHADO

JUNTA DE EXTREMADURA
Consejería de Educación y Empleo

Edición Octubre 2022

http://eda.educarex.es/portaleda/
https://eda.educarex.es/moodleap

Contenidos

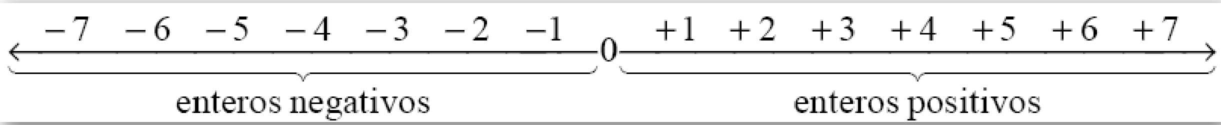
UNIDAD DIDÁCTICA 1
LOS NÚMEROS REALES

1. Números enteros

A todos estos números, los negativos, el cero y los positivos, se les llama **números enteros** y se representan por la letra **Z**:

$$Z = \{\ldots,-5,-4,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,+4,+5,\ldots\}$$

Estos números tienen un orden. El mayor de los números enteros es el que está situado más a la



derecha en la recta numérica:

Si a los números enteros +3 y -3 les quitamos su signo obtenemos el 3. A este valor se le llama **valor absoluto**.

1. Expresa con números y con el signo correspondiente:

a) Arquímedes nació en el año 287 antes de Cristo.
b) El año 620 antes de Cristo.
c) El año 1492 después de Cristo.
d) El año actual.
e) Siete grado sobre cero
f) Ocho grados bajo cero
g) Elena gano 30 euros
h) Antonio perdió 2 euros.

2. Describe mediante un número entero positivo o negativo cada una de las siguientes situaciones y halla después el valor absoluto de dicho número:

a) La temperatura es de 4 grados bajo cero
b) Debo 12 euros
c) Laura perdió sesenta céntimos.
d) Cincuenta años antes de Cristo
e) La temperatura es de 14 grados sobre cero
f) 1200 años después de Cristo.

1.1. Suma y resta de números enteros

A.-Suma de dos números enteros del mismo signo

Para sumar dos números enteros del mismo signo se suman los valores absolutos y se pone el mismo signo de los sumandos.

(-60) + (-40) = -100	(+60) + (+40) = +100

3. Calcula:

a)	(+13) + (+8)	b)	(-13) + (-8)	c)	(+15) + (+20)
d)	(+18) + (+13)	e)	(-14) + (-20)	f)	(-30) + (-70)
g)	(-50) + (-70)	h)	(+80) + (+40)	i)	(-6) + (+12)

B-Suma de dos números enteros de distinto signo

Para sumar dos números enteros de distinto signo se restan sus valores absolutos y se pone el signo del sumando de mayor valor absoluto.

(+60) + (-40)= +20 (-60) + (+40) = -20

4. Calcula:

a)	(+12) + (-8)	b)	(-12) + (+8)	c)	(-30) +(+20)
d)	(+30) + (-20)	e)	(+50) + (-80)	f)	(-50) + (+80)
g)	(+3) + (-28)	h)	(-5) + (+7)	i)	(-2) + (+14)
j)	(-8) + (+7)	k)	(-9) + (-8)	l)	(-13) + (-15)

1.2. Multiplicación y división de números enteros

Para multiplicar o dividir dos números enteros, se multiplican o dividen sus valores absolutos. El signo del producto o cociente vendrá dado por las siguientes **reglas de los signos:**

+ · + = +	+ : + = +
- · - = +	- : - = +
+ · - = -	+ : - = -
- · + = -	- : + = -

5. Calcula los siguientes productos

a) (+5) · (+8) b)(-5) · (-8) c)(-5) · (+8) d) (+5) · (-8)
e) (+9) · (-6) f) (-9) · (-6) g) (+9) · (+6) h) (-9) · (+6)

6. Calcula los cocientes:

a) (-12) : (+6) b) (+48) : (-6) c) (+32) : (-4) d) (-26) : (-13)
f) (-15) : (-15) g) (+40) : (-8) h) (-30) : (+5) i) (-2) : (-1)
j) (-8) : (+2) k) (-28) : (-7)

1.2. Operaciones combinadas

Si en nuestro cálculo aparecen operaciones variadas, primero hacemos las operaciones indicadas entre paréntesis, después potencias y raíces, después las multiplicaciones y divisiones, y por último las sumas y las restas. Una potencia es una multiplicación.

7. Calcula:

a) 8 + 7 – (-9) + (-4) + (-8) b) 2 -12 -15 + 12 + 4 – 15 + 3 c)(-40) + (-12) + 8 -6
d) (-13) – (+6) + (5) – (-9) e) (+5) + (-3) + (-6) + (-8) f) (-7) + (-4) + (+9) + (12)
g) (-3) + (-4) + (-5) + (-6) h)(-7) + (+8) + (-3) + (-4)

8. Realiza estas operaciones:

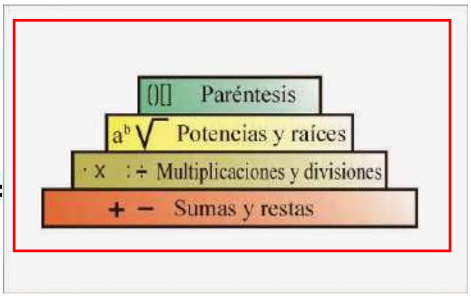
a) (+12) - [- (+ 7) – (- 4) – (+ 8)] = b) (+ 16) - [(-8) - (-4)] - (-5) =
c) (+13) · [(+6) – (-5) + (+4) - (+ 2)] + (+1) =

9. Calcula:

a) (+3) - (+4) · [(+2) - (+5)] - [(+1) + (+6)] · (+3) =
b) (-5) · [(+2) - (-3) + (+5)] + (+8) · [(-9) + (- 3)] =

10. Realiza las siguientes operaciones utilizando la jerarquía:

a) (+ 4) - (-3) + (-7) =
b) (-5) - (+ 4) - (+3) =
c) 22 + 5 - 21 + 15 =
d) 4 · 3 – 18 : 6 =



e) 50 - [(5 - 1) - (4 - 3)] =
f) 5 · (- 5) + 5 - 4 · (- 8 + 2) =
g) 29 – 4 ·12 - (34 - 18) + 2 · (18 - 10)
h) 2 3 – 2 2 + 2 5 =

2. Los números racionales

Una **fracción o numero fraccionario** es un par de números naturales a y b en la forma: **a/b** de los cuales b es el **denominador** y nos indica el número de partes iguales en que dividimos la unidad es el **numerador** y nos indica cuántas de estas partes cogemos.

Es decir, una fracción es una división que no se ha realizado. Ejemplo: $\frac{28}{14} = 28 : 14$

¡Ojo! No podemos dividir por cero, luego el número b no puede ser cero.

Si en lugar de aparecer números naturales, hubiera números enteros (recuerda, números que pueden ser negativos), diríamos que el número es **racional**.

$\frac{-28}{14} = (-28): 14 = \ -2$ $\qquad \frac{5}{-4} = 5 : (-4)$ $\qquad -\ \frac{4}{3} = -(4 : 3)$

¿Sabrías identificar las fracciones en los ejemplos anteriores?

– Un tercio de las patatas "chips" es grasa. Solución $\frac{1}{3}$

– El tren con destino a Madrid trae un retraso de tres cuartos de hora. Solución $\frac{3}{4}$

– Uno de cada 100 nacidos en España es celiaco. Solución $\frac{1}{100}$

– 3.450 €, tienen que repartirse entre los 12 vecinos del inmueble. Solución $\frac{3450}{12}$

11. **Una persona adulta dedica $\frac{1}{3}$ del día a dormir. ¿Cuántas horas dedica a dormir diariamente?**

12. **En el presupuesto de una familia se dedica $\frac{2}{5}$ de los ingresos a la vivienda. Si los ingresos son 2.120 €, ¿cuánto se dedica a vivienda?**

2.1. Fracciones equivalentes

Si se reparten 6 € entre tres personas, ¿cuánto recibe cada una? ¿Y si se reparten 12€ entre seis personas? Puedes comprobar que en ambos casos el resultado es el mismo.

$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2$ €

Dos **fracciones son equivalentes** cuando escritas de distintas maneras tienen el mismo resultado.

Para comprobar que dos fracciones son equivalentes, basta con multiplicar en cruz y observar que el resultado obtenido es el mismo.

6.6 = 3.12

Para obtener fracciones equivalentes a una dada basta con multiplicar o dividir el numerador y el denominador por el mismo número.

Ejemplo: $\frac{5}{6} = \frac{5.2}{6.2} = \frac{10}{12}$

13. **Busca tres fracciones equivalentes a cada una de las siguientes. Ten en cuenta que hay muchas posibles soluciones.**

$\frac{3}{7}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{2}{3}$

14. **Forma fracciones equivalentes a:**

$\frac{1}{5}, \frac{7}{9}, \frac{1}{100}, \frac{10}{15}, \frac{6}{7}$

15. **Dos personas salen de su casa con 9 €. Una se gasta en el cine $\frac{4}{6}$ y la otra $\frac{6}{9}$.**

a) ¿Quién se ha gastado más en el cine? **b)** Son equivalentes $\frac{4}{6}$ y $\frac{6}{9}$

16. **Comprueba si son las siguientes fracciones son equivalentes o no:**

a) $\frac{4}{9}$ y $\frac{12}{25}$ b) $\frac{5}{10}$ y $\frac{6}{12}$ c) $\frac{3}{81}$ y $\frac{2}{1542}$

17. **Completa las siguientes fracciones para que sean equivalentes:**

a) $\frac{4}{12} = \frac{3}{?} = \frac{?}{6}$ b) $\frac{?}{3} = \frac{14}{21} = \frac{20}{?}$

18. **Vamos a ver qué sucede cuando la fracción tiene un signo negativo en el numerador o en el denominador.**

a) ¿Serán equivalentes las fracciones $\frac{-3}{5}$ y $\frac{-6}{10}$? b) ¿Será $\frac{-3}{5}$ equivalente a $\frac{3}{-5}$?

2.2. Operaciones con fracciones

Suma y resta de fracciones

a.-Para sumar o restar fracciones con el mismo denominador, se suman o se restan los numeradores y se deja el denominador común:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{10}{4} \qquad \frac{7}{4} - \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

b.-Para sumar o restar fracciones con distintos denominadores se reducen éstas a denominador común, y se realiza la suma o la resta.

m.c.m. (4, 2) = 4

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{2} = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4} \qquad \frac{2}{2} - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

19. **Realiza las siguientes operaciones:**

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$ **b)** $\frac{5}{9} - \frac{7}{12}$ **c)** $\frac{3}{5} - \frac{11}{20}$

20. **Realiza las siguientes operaciones:**

a) $\frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{1}{10} =$ **b)** $\frac{2}{20} + \frac{4}{5} - \frac{3}{10}$ **c)** $\frac{7}{20} - \frac{13}{15} - \frac{3}{10}$

21. **Realiza las siguientes operaciones:**

a) $\frac{7}{60} + \frac{2}{50} - \frac{3}{15}$ **b)** $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$ **c)** $\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + \frac{7}{8}$

22. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{-1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{2}{6}$ **b)** $\frac{3}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{12}$ **c)** $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{5}$

► Producto

Para multiplicar dos fracciones se halla una nueva fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

$$\frac{7}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{14}{12}$$

23. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{10}=$ **b)** $\frac{2}{20}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{10}=$ **c)** $\frac{7}{20}\cdot\frac{13}{15}\cdot\frac{3}{10}=$

24. Realiza las siguientes operaciones simplificando el resultado:

a) $\frac{7}{60}\cdot\frac{20}{50}\cdot\frac{30}{15}=$ **b)** $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=$ **c)** $\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8}=$

25. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{-1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{2}{6}$ **b)** $\frac{3}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{12}$ **c)** $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{5}$ **d)** $3\cdot\frac{4}{5}$

► División

Para dividir dos fracciones se multiplica el dividendo por el inverso del divisor

La fracción inversa de la fracción $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$

$$\frac{7}{4}:\frac{2}{3}=\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{21}{8}$$

26. Realiza las siguientes divisiones:

a) $\frac{3}{-5}\div\frac{7}{8}$ **b)** $1\div\frac{6}{7}$ **c)** $\frac{-1}{2}\div\frac{1}{-2}$

d) $\frac{3}{5}\div\left(\frac{1}{2}\div\frac{7}{8}\right)$ **e)** $\left(\frac{3}{5}\div\frac{1}{2}\right)\div\frac{7}{8}$

27. La cifra del número de parados en Extremadura en el mes de abril fue de 79.483. Si durante el mes de mayo se ha incrementado 1,6%, ¿cuántos parados hay en Extremadura actualmente?

28. ¿Son las fracciones $\frac{10625}{100}$ y $\frac{1274}{12}$ equivalentes? ¿A qué número decimal corresponden?

29. Realiza las siguientes operaciones utilizando la jerarquía:

a) $\frac{4}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}=$ b) $4+\frac{3}{4}-\frac{7}{12}=$ c) $\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{9}=$

d) $\frac{4}{11}:\frac{5}{6}=$ e) $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{2}\right)=$ f) $\frac{5}{7}-\frac{2}{5}:\frac{1}{4}=$

g) $4-\left(\frac{2}{9}-\frac{4}{3}\right)=$ h) $(-3)\cdot\frac{(-2)}{5}=$

30. **Un vehículo puede transportar 1.800 kg. Si lleva las tres quintas partes de dicho peso, ¿cuántos kg le falta para llenar el vehículo?**

31. **Si un amigo me debe una cantidad igual a los siete octavos de 96 € y me paga los tres cuartos de lo que me debe, ¿cuánto me debe aún?**

3. Potencias

3.1. Potencias de exponente natural. Raíces cuadradas

Una **potencia** es un producto de factores iguales. El número que se repite se llama **base** y el número de veces que se repite la base se llama **exponente**.

a) $(+5)^2 = (+5)\cdot(+5) = +25$ "5 elevado al cuadrado".

b) (- 4)3 = (- 4)× (- 4)× (- 4) = -64 "-4 elevado al cubo"

La **raíz cuadrada** exacta de un número es otro número que elevado al cuadrado es igual al número dado.

4 es el cuadrado de 2, $(+2)^2 = 4$, luego 2 es la raíz cuadrada de 4, $\sqrt{4} = +2$

25 es el cuadrado de 5, $(+5)^2 = 25$, luego 5 es la raíz cuadrada de 25, $\sqrt{25} = +5$

1. **Escribe en forma de potencia:**

a) 3 x 3 x 3 x 3 = b) 10 x 10 = c) 16 x 16 x 16 = d) m x m x m =

2. **Calcula:**

a) 5^2; 5^3

b) 2^2; 2^3; 2^4; 2^5

c) 3^2; 3^3; 3^4

3. **Halla los números cuyos cuadrados sean:**

a) $(\quad)^2 = 9$ b) $(\quad)^2 = 64$ c) $(\quad)^2 = 100$ d) $(\quad)^2 = 81$

e) $(\quad)^2 = 49$ f) $(\quad)^2 = 121$

4. **Calcula:**

$\sqrt{1}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt{9}$

$\sqrt{16}$ $\sqrt{25}$ $\sqrt{36}$

$\sqrt{49}$ $\sqrt{64}$ $\sqrt{81}$

Dado un número real a y un número entero n > 1, se define la potencia de base a y exponente n:

$\boxed{a^n = a\cdot a\cdot a\cdot \ldots\cdot a \text{ (n veces)}}$

como producto reiterado n veces del mismo factor a.

Dado un número real "a" y un número entero –n, se define la potencia de base a y exponente negativo -n :

$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a.a.a.a.\ a} =}$ $\boxed{a^0 = 1}$

Una potencia de exponente negativo es el inverso de la misma potencia con exponente positivo

3.2. Operaciones con potencias

$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$ $\boxed{a^n \cdot b^n = (a.b)^n}$ $\boxed{\frac{a^n}{b^n} = (a/b)^n}$

$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$ $\boxed{(a^n)^m = a^{n.m}}$

5. Escribe en forma de una sola potencia:

a) $3^3 \cdot 3^4 \cdot 3 =$ b) $5^7 : 5^3 =$ c) $(5^3)^4 =$ d) $(5 \cdot 2 \cdot 3)^4 =$

e) $(3^4)^4 =$ f) $[(5^3)^4]^2 =$ g) $(8^2)^3$ h) $(9^3)^2$

i) $2^5 \cdot 2^4 \cdot 2 =$ j) $2^7 : 2^6 =$ k) $(2^2)^4 =$ l) $(4 \cdot 2 \cdot 3)^4 =$

m) $(2^5)^4 =$ n) $[(2^3)^4]^0=$ o) $(27^2)^5=$ p) $(4^3)^2 =$

6. Realiza las siguientes operaciones con potencias:

a) $(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 =$ b) $(-8) \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^0\ (-2) =$ c) $(-2)^{-2} \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 =$

d) $2^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 2^4 =$ e) $2^2 : 2^3 =$ f) $2^{-2} : 2^3 =$

g) $2^2 : 2^{-3} =$ h) $2^{-2} : 2^{-3} =$ i) $[(-2)^{-2}]^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 =$

j) $[(-2)^6 : (-2)^3]^3 \cdot (-2) \cdot (-2)^{-4} =$ k) $(-3)^1 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)^4 =$

l) $(-27) \cdot (-3) \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^0=$ m) $(-3)^2 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)^{-4} =$

n) $3^{-2} \cdot 3^{-4} \cdot 3^4 =$ o) $5^2 : 5^3 =$

p) $5^{-2} : 5^3 =$ q) $5^2 : 5^{-3} =$

r) $5^{-2} : 5^{-3} =$ s) $(-3)^1 \cdot [(-3)^3]^2 \cdot (-3)^{-4} =$

t) $[(-3)^6 : (-3)^3]^3 \cdot (-3)^0 \cdot (-3)^{-4} =$

3.3. Propiedades de las potencias

1) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ *además* $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$ *además* $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

4) $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$

7. **Realiza las siguientes operaciones con potencias:**

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=$ $\quad\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=$ $\quad\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$ $\quad\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=$ $\quad\left(\frac{2}{3}\right)^{2}:\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}:\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=$ $\quad\left(\frac{2}{3}\right)^{2}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$ $\quad\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$ $\quad\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}=$ $\quad\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}\right\}^{-4}=$

$\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}:\left(\frac{27}{8}\right)^{-3}=$

8. **Calcula los valores de las siguientes potencias:**

$16^{\frac{3}{2}}=$ $\quad 8^{\frac{2}{3}}=$ $\quad 81^{0.75}=$ $\quad 8^{0.333...}=$

4. Raíces: potencias de exponente fraccionario

4.1. Radicales

Llamamos **raíz n-ésima** de un número dado a al número b que elevado a n nos da a.

$$\boxed{\sqrt[n]{a}=b \iff b^{n}=a}$$

Un **radical** es equivalente a una **potencia de exponente fraccionario** en la que el **denominador** de la fracción es el **índice** del radical y el **numerador** de la fracción es el **exponente** el radicando.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^{p}}=a^{\frac{p}{n}}}$$

4.2. Radicales equivalentes

Dos o más radicales se dicen **equivalentes** si las fracciones de los exponentes de las potencias asociadas son equivalentes.

Dado un radical se pueden obtener infinitos radicales semejantes, **multiplicando** o **dividiendo** el exponente del radicando y el índice de la raíz por un mismo número. Si se multiplica se llama **amplificar** y si se divide se llama **simplificar** el radical.

Radical **irreducible**, cuando la fracción de la potencia asociada es irreducible.

$\sqrt[3]{x^{2}}=\sqrt[6]{x^{4}}$ Son equivalentes por ser $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$

9. **Simplifica los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[4]{3^{2}}=$ b) $\sqrt[6]{x^{3}}=$ c) $\sqrt[12]{2^{6}b^{3}}=$ d) $\sqrt[8]{a^{4}b^{16}}=$ e) $\sqrt[10]{x^{15}y^{20}}=$ f) $\sqrt[18]{3^{6}a^{12}x^{24}}=$

4.3. Introducción y extracción de factores

Para **introducir** un factor dentro de un radical se eleva el factor a la potencia que indica el índice y se escribe dentro.

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 . 3} = \sqrt[3]{8 . 3} = \sqrt[3]{24}$$

Si algún factor del radicando tiene por exponente un número mayor que el índice, se puede **extraer** fuera del radical dividiendo el exponente del radicando entre el índice. El cociente es el exponente del factor que sale fuera y el resto es el exponente del factor que queda dentro.

$$\sqrt[5]{x^{13}} = x^2\sqrt[5]{x^3}$$

10. Extrae factores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{27} =$ b) $\sqrt[3]{16a^5} =$ c) $\sqrt[4]{16b^{13}} =$ d) $\sqrt[5]{5x^{10}} =$ e) $\sqrt[3]{8a^4x^{10}} =$ f) $\sqrt[6]{3^7.y^{20}} =$

4.4. Cálculo de raíces

Para calcular la raíz n-ésima de un número primero se factoriza y se escribe el número como producto de potencias, luego se extraen todos los factores.

Si todos los exponentes del radicando son múltiplos del índice, la raíz es exacta.

$\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2^6 . 3^3} = 2^2 . 3 = 12$

11. Calcular las siguientes raíces, razonando el resultado:

a) $\sqrt{121} =$ b) $\sqrt[3]{-8} =$ c) $\sqrt[4]{81} =$ d) $\sqrt[3]{0{,}125} =$ e) $\sqrt{-8} =$ f) $\sqrt[5]{-0{,}00001} =$

4.5. Reducción a índice común

Reducir a **índice común** dos o más radicales es encontrar radicales equivalentes a los dados que tengan el mismo índice.

El índice común es cualquier múltiplo del m.c.m. de los índices.

El mínimo índice común es el m.c.m. de los índices.

$\sqrt[6]{2}$; $\sqrt[10]{3}$ m.c.m. (6, 10) = 30

$\sqrt[6]{2} = \sqrt[30]{2^5} = \sqrt[30]{32}$ $\sqrt[10]{3} = \sqrt[30]{3^3} = \sqrt[30]{27}$

► Radicales Semejantes

Radicales semejantes son aquellos que tienen el mismo índice y el mismo radicando. Pueden diferenciarse únicamente en el coeficiente que los multiplica.

$$2\sqrt[3]{4} \;\; ; \;\; 7\sqrt[3]{4} \;\; ; \;\; 5\sqrt[3]{4}$$

12. Escribe los siguientes radicales como potencia de exponente fraccionario.

a) $\sqrt[5]{3}$ b) $\sqrt[5]{x^3}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{a^3}$ e)

13. Escribe las siguientes potencias como raíces

a) $7^{\frac{1}{2}}$ b) $5^{\frac{2}{3}}$

14. Escribe radicales equivalentes amplificando o simplificando

a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt[5]{X^4}$ c) $\sqrt[6]{49}$ d) $\sqrt[35]{x^{28}}$

15. Introduce factores en el radical

a) $2\sqrt[4]{3}$ b) $x^2\sqrt[7]{x^3}$ c) $2\sqrt[5]{3}$ d) $ab^2\sqrt[3]{a^2b}$

16. **Extrae todos los radicales posibles**

a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt[3]{16}$ c) $\sqrt{9.a^3}$ $d)$ $\sqrt{98a^3b^5\,c^7}$

17. **Reduce al mínimo común índice:**

a) $\sqrt{5}$; $\sqrt[5]{3}$ b) $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[8]{7}$; $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}$; $\sqrt[6]{32}$; $\sqrt[3]{5}$

4.6. Operaciones con radicales

► Suma/Diferencia de radicales

Solamente pueden sumarse (o restarse) dos radicales cuando son radicales semejantes, es decir, si son radicales con el mismo índice e igual radicando.

► Producto de radicales

Radicales del mismo índice

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$$

Radicales de distinto índice

Primero se reducen a índice común y luego se multiplican.

► Cociente de radicales

Radicales del mismo índice

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Radicales de distinto índice:

Primero se reducen a índice común y luego se dividen.

► Potencia de radicales

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$$

► Raíz de un radical

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$$

18. **Resuelve las siguientes operaciones de suma y resta de raíces:**

a) $\sqrt{6}+\sqrt{60}-\sqrt{54}+\sqrt{96}=$

j) $9\sqrt{48}-\sqrt{12}-2\sqrt{27}+3\sqrt{75}=$

b) $9\sqrt{27}+2\sqrt{3}-8\sqrt{300}-4\sqrt{3}=$

k) $6\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}=$

c) $\frac{3\sqrt{45}}{2} - \frac{\sqrt{20}}{3} + 4\sqrt{125} - \sqrt{5} =$

l) $8\sqrt{8} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{20} - 12\sqrt{5} + 3\sqrt{18} =$

d) $6\sqrt[5]{8} - 3\sqrt[5]{8} + 14\sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{8} =$

m) $5\sqrt[4]{21} + 4\sqrt[4]{21} - 3\sqrt[4]{21} + 14\sqrt[4]{21} - 111\sqrt[4]{21} =$

e) $7\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} =$

n) $11\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{2} + 8\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} + 4\sqrt{2} - \sqrt{2} =$

f) $3\sqrt{7} - \sqrt{11} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 5\sqrt{11} + \sqrt{2} =$

ñ) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{7} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{7}{2}\sqrt{3} - \frac{11}{2}\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3} =$

g) $\frac{2}{3}\sqrt{7} - \frac{2}{5}\sqrt{5} + \frac{3}{8}\sqrt{5} - \frac{2}{7}\sqrt{7} =$

o) $\frac{5}{2}\sqrt{45} - \frac{\sqrt{20}}{4} + 3\sqrt{125} - \frac{1}{2}\sqrt{5} =$

h) $\frac{7}{2}\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} + 14\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} =$

p) $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{20} + \frac{3}{2}\sqrt{80} =$

i) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{54} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{250} =$

q) $\sqrt{125} + \sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24} =$

19. Escribe con una sola raíz:

$\sqrt[5]{\sqrt{3}} =$ $\quad \sqrt[7]{x^4\sqrt{x}} =$ $\quad \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27} =$ $\quad \sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2} =$ $\quad \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} =$ $\quad \frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^3}}$

20. Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones de radicales:

$\sqrt{2}.\sqrt{8} =$ $\quad \sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{25} =$ $\quad \sqrt[4]{x^2}.\sqrt[4]{x^3} =$ $\quad \frac{\sqrt[6]{125}}{\sqrt[6]{25}} =$ $\quad \sqrt[3]{2x}.\sqrt[3]{3x}.\sqrt[3]{5x} =$

$\sqrt[5]{\frac{2}{3}}.\sqrt[5]{\frac{3}{2}} =$ $\quad \frac{2}{\sqrt{6}} =$ $\quad \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} =$ $\quad \sqrt{6} : \sqrt{2} =$ $\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} =$

$\sqrt[5]{6x^3} : \sqrt[5]{2x} =$ $\quad \sqrt{15}\cdot\sqrt{30} =$ $\quad \frac{2}{\sqrt{6}} =$ $\quad \frac{5}{\sqrt{45}} =$ $\quad \frac{1}{\sqrt[3]{a}} =$

► Racionalizar

Consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones. Podemos distinguir tres casos.

<table>
<tr>
<td>$\frac{a}{b\sqrt{c}}$ Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$.

$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\cdot c}$</td>
<td>$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$ Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$.

$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m}\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m\cdot c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^n}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\cdot c}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, y en general cuando el denominador sea un binomio con al menos un radical.

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.</td>
</tr>
</table>

21. Racionaliza:

$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} =$ $\quad \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}} =$ $\quad \frac{2}{\sqrt[3]{2}} =$ $\quad \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}} =$ $\quad \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$

$\frac{1}{\sqrt{3}-2}=$ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$ $\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}=$ $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=$

$\frac{3}{3+\sqrt{3}}=$ $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}=$ $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=$ $\frac{3}{\sqrt{5}-2}=$ $\frac{11}{2\sqrt{5}+3}=$

$\frac{1}{\sqrt[5]{9}}=$ $\frac{2}{5\cdot\sqrt[3]{4}}=$ $\frac{1}{\sqrt[7]{x^4}}=$ $\frac{1}{x^2\sqrt[7]{x^3}}=$ $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2}$

5. Números grandes. Notación científica

La notación científica se utiliza para expresar brevemente números que son muy grandes o muy pequeños.

Por ejemplo: el número $2_2340.000_1000.000$ es muy grande y es más cómodo expresarlo como $2{,}34\cdot10^{12}$.

Observa que debemos poner una sola cifra en la parte entera y el exponente del 10 es igual al número de cifras que hay desde que colocamos la coma hasta el final (contando de izquierda a derecha).

Para **expresar un número con notación científica** debemos usar una sola cifra para la parte entera y el resto las pondremos como parte decimal. No es conveniente usar más de tres cifras decimales. El resto de las cifras decimales se redondean o sustituyen por ceros.

Ejemplos:

1- Expresa con notación científica los siguientes números:

$237.000 = 2{,}37\cdot10^5$

$128_2500.000_1000.000 = 1{,}285\cdot10^{14}$

$860.000_2000.000_1000.000 = 8{,}6\cdot10^{17}$

2- Expresa con notación decimal los siguientes números:

$3{,}24\cdot10^5 = 3{,}24 \cdot 100.000= 3_1240.000$

$4{,}7\cdot10^8 = 4{,}7 \cdot 100_1000.000 =470_1000.000$

$5{,}859\cdot10^6 = 5{,}859 \cdot 1_1000.000 = 5_1859.000$

3- Expresa con notación científica el número de habitantes que había en el mundo en el año 2005.

En el 2005 se contabilizaron $6.525_1170.264$ habitantes, que son aproximadamente $6.525_1000.000$, es decir, $6{,}525\cdot10^9$ habitantes. En este caso se comprende mejor si lo expresamos diciendo que había unos seis mil quinientos veinticinco millones de habitantes.

22. **Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado con notación científica:**

a) 347.000 x 35.000x 2.400 =
b) 56.000.000 x 351.000 x 6.000 =

23. **La velocidad de la luz es 300.000 km/s. ¿Cuál es la velocidad en km/h? Exprésalo con notación científica.**

24. **La distancia desde la tierra hasta la estrella más cercana (Próxima Centauro) es 4,22 años luz. Eso significa que la luz que ahora mismo recibimos de esa estrella es de hace 4,22 años. Exprésalo con notación científica.**

a) En días.

b) En horas.

25. **Expresa el número 76.000.000.000 con notación científica:**

26. **Realiza la operación 45.800.000 x 73.000 expresando el resultado con notación científica:**

27. **Supón que un grano de arroz pesa 0,2 gramos. Calcula el número de granos de arroz que entran en 50 paquetes de un kilogramo. Ten en cuenta que un kilogramo son mil gramos.**

28. **La hormiga roja tiene una longitud media de 7 mm. Si se formase una fila de hormigas desde Cáceres hasta Mérida (distancia aproximada, 64,7km), ¿cuántas hormigas rojas harían falta? Ten en cuenta que un kilómetro son 1.000.000 de milímetros.**

6. Magnitudes directa e inversamente proporcionales

Para saber cuánto cuestan 3 Kg de naranjas, multiplicamos el precio de 1 Kg por 3. Si hacemos un trabajo de clase entre dos compañeros, tardamos la mitad de tiempo que si lo hacemos solos. Es decir, en la vida diaria utilizamos continuamente las **proporciones numéricas**.

Decimos que dos **magnitudes son directamente proporcionales** cuando si aumenta una la otra aumenta proporcionalmente o si disminuye una, la otra lo hace de la misma manera. Por ejemplo los kilos de naranjas y su precio: si un kilo vale 2 euros, 3 kilos valdrán 6, 4 costarán 8 y así sucesivamente

Dos **magnitudes son inversamente proporcionales** si cuando una aumenta, la otra disminuye, y viceversa, aunque siempre en la misma proporción. Por ejemplo, si un albañil levanta una pared en 4 días, dos albañiles lo harán en 2 días: cuanto mayor sea el número de la primera, menor será el de la segunda.

6.1. Resolución de problemas mediante la regla de tres directa

Vas a resolver una cuestión en la que aparecen dos magnitudes directamente proporcionales. Sabiendo que un paquete de 12 litros de leche cuesta 10,20 € vamos a calcular cuánto costará un paquete de 15 litros.

a) Calcula cuánto cuesta un litro de leche.

b) Calcula cuánto costarán 15 litros de leche.

c) ¿Son proporcionales el número de litros de leche que hay en el paquete y el precio del mismo?

Para resolver la actividad anterior has hecho lo siguiente:

10,20 : 12 = 0,85 **0,85 · 15 = 12,75 €**

Observa que hubieras obtenido el mismo resultado si hubieras efectuado las operaciones en este orden:

10,20 · 15 = 15,30 **15,30 : 12 = 12,75 €**

En la práctica, este tipo de cuestiones se resuelven mediante **una regla de tres**.

La regla de tres directa es un mecanismo de cálculo, que <u>permite resolver con más rapidez los problemas en los que aparecen dos magnitudes directamente proporcionales</u>. Consiste en lo siguiente:

X = precio de los 15 l de leche

Llamamos X a la cantidad que se quiere calcular, en este caso el precio de 15 l de leche

LITROS PRECIO

12 ----------------10,20

15 ------------------ X

Se colocan los datos de forma que coincidan los de la misma magnitud, uno debajo del otro.

$$x = \frac{15 \cdot 10{,}20}{12} = 12{,}75$$

Se multiplican los dos números contiguos a la X (10,20 ·15) y se divide el resultado por el número que está en diagonal con la X

OJO: Antes de realizar la regla de tres tienes que comprobar que las magnitudes que aparecen sean directamente proporcionales.

La regla de tres se puede utilizar para resolver problemas de velocidad, espacio recorrido y tiempo empleado. Recuerda que la velocidad media de un móvil es el espacio que recorre en la mitad de tiempo.

29. **Un coche recorre 60 km en 3/4 de hora. ¿Cuál es su velocidad media?**

30. **Un tren lleva una velocidad media de 90 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer una distancia de 315 km?**

También se utiliza la regla de tres para realizar cambios de unas unidades a otras.

31. **Una persona comprueba que una distancia de 120 km equivale a 75 millas inglesas.**

a) ¿Cuál será la distancia en millas entre dos ciudades que distan entre sí 320 km?

b) Si la distancia entre pueblos es de 34 millas, ¿cuántos km serán?

Observa también cómo la regla de tres se puede utilizar para resolver muchas cuestiones de la vida diaria.

32. **Al cambiar dinero en un banco, por 1 dólar nos cobran 0,90 €. ¿Cuántos dólares nos darán por 18.000 euros?**

33. **. Una persona trabaja cinco horas diarias y cobra cada día 48,75 €. Un día trabaja solamente tres horas. ¿Cuánto cobrará?**

34. **Los ingredientes de una receta para hacer un bizcocho son: 6 huevos, 200 g de azúcar, 150 g de harina y 120 g de mantequilla. Queremos hacer un bizcocho y sólo tenemos 4 huevos. ¿Qué cantidad de harina, azúcar y mantequilla tendremos que poner?**

35. **Para hacer cortinas para una ventana de 80 cm de ancho, he necesitado 1 m 20 cm de tela. ¿Qué cantidad de tela necesitaré para hacer cortinas para una ventana de 1,50 m?**

6.2. Porcentajes

Otra de las aplicaciones de la proporcionalidad directa son los porcentajes. En tu vida diaria oyes continuamente hablar de tantos por ciento: la subida salarial será de un 2%, las rebajas son de un 20%, el IPC. ha subido este mes un 0,8%, el partido A ha obtenido un 3% más de votos que el partido B...

¿Qué significan estos %? Si te dicen que la subida salarial es de un 2% (que se lee "2 por ciento"), significa que por cada 100 € que cobres tu sueldo aumentará 2 €.

Verás que los problemas de porcentajes son un caso particular de los problemas de proporcionalidad directa y por tanto se pueden resolver aplicando la regla de tres.

36. Las rebajas en unos almacenes son del 15%. Vamos a comprar unos pantalones de 58,80 €.

a) ¿Qué descuento nos harán?
b) ¿Cuánto tendremos que pagar por los pantalones?

37. En una librería hacen un descuento del 10%. En otra hay una cartel que dice "Por cada 1,10 € de compra, le cobraremos solamente 1 €." ¿En cuál de las dos librerías es mejor el descuento? Razona la respuesta.

38. Al comprar un frigorífico de 1.000 € nos hacen un descuento del 5%, pero por llevarlo a casa tenemos que pagar un recargo del 5%. ¿Cuánto tendremos que pagar por el frigorífico?

39. El presupuesto por la pintura de una casa es de 2.350 € más el 16% del IVA. ¿Cuánto nos costará pintar la casa?

En las actividades anteriores, has visto cómo calcular un determinado tanto por ciento de una cantidad. Hay veces que el problema es distinto. Por ejemplo, en unas elecciones sabemos el número de personas que ha votado a cada partido y queremos calcular cuál es el porcentaje de votos de cada uno de ellos. Es decir, queremos saber de cada 100 personas cuántas han votado a cada partido.

40. En un pueblo que tiene 8.520 personas en el censo electoral han votado 7.220 en unas elecciones y el resto se han abstenido.

Calcula el porcentaje de participación, es decir, de cada 100 personas cuántas han votado.

41. En una librería, por un libro de 14,50 € nos cobran 12,76 €.

a) ¿Cuántos euros nos han rebajado?
b) ¿Qué tanto por ciento de descuento nos han hecho?

42. La población activa en España en 1996 era de 16.039.000 personas de las cuales trabajaban 12.524.000. Calcula el porcentaje de paro.

A veces el problema es el contrario. Sabemos el precio final de un producto después de haberle aplicado un determinado tanto por ciento de descuento o de recargo y queremos saber su precio antes de dicho descuento o recargo.

43. En unos almacenes hacen el 15% de descuento. Por un abrigo nos han cobrado 212,50 € y queremos calcular su precio antes del descuento.

a) Si por cada euro que cuesta el abrigo te descuentan 0,15 €, ¿cuántos euros tienes que pagar por cada 1?
b) ¿A qué cantidad tendrás que llamar X en esta regla de tres?
c) Plantea la regla de tres, sabiendo que por cada euro tienes que pagar 0,85 €.
d) Resuelve la regla de tres y comprueba si el resultado obtenido es correcto.
e) ¿Hubieras obtenido el mismo resultado si a 212,50 € le hubieras sumado el 15%?

44. Por hacer una obra en casa nos cobran el 16% de IVA. Hemos tenido que pagar 9.512 €.

a) Por cada euro que cuesta la obra, ¿cuánto tenemos que pagar en realidad?
b) ¿Cuánto costaba la obra sin el IVA?

45. En los cines también se paga un 16% de IVA. Por una entrada pagamos 5,50 €. Calcula qué parte corresponde a la entrada y qué parte al IVA.

46. Queremos conseguir una disolución de alcohol en agua al 22% de concentración, es decir, que por cada 100 cl de disolución, 22 cl sean de alcohol. Tenemos 110 cl de alcohol y queremos calcular en cuántos cl de agua lo tendremos que disolver.

a) ¿Qué cantidad de agua tenemos que utilizar para disolver 22 cl de alcohol?
b) ¿Qué cantidad de agua necesitaremos para disolver los 110 cl de alcohol?

47. Pon cinco ejemplos de tu vida diaria en los que aparezcan los porcentajes.

6.3. Repartos directamente proporcionales

Otra aplicación de la proporcionalidad directa es en los repartos proporcionales. Por ejemplo, si al realizar un trabajo entre dos personas una de ellas trabaja más horas que la otra es lógico que cobre más. Si dos personas compran un décimo de lotería pero no lo pagan a partes iguales, es lógico que el premio tampoco lo repartan a partes iguales.

48. Entre dos pintores pintan una casa tardando en ello siete días. Los tres primeros días trabajan los dos juntos, pero los otros cuatro días sólo trabaja uno de ellos. Si cobran 2.250 €, vamos a calcular cómo las tienen que repartir.

Vamos a ver cómo se puede resolver la cuestión anterior planteando una regla de tres.

Sabemos que los pintores han trabajado en total (3 x 2) + 4 = 10 días, cobrando por ello *2.250* €

.Vamos a llamar X a lo que va a cobrar el pintor que trabajó *7* días:

DÍAS PRECIO

10 --------------------- 2250

7 ----------------------- X

$$x = \frac{7 \cdot 2250}{10} = 1575$$

Por tanto un pintor cobrará *1.575* € y el otro el resto, esto es, *675* €.

49. Entre tres amigos compran un décimo para el sorteo de Navidad. Pedro paga 5 €, Teresa 10 € y Ana 5 €. Si cobran un premio de 1.800 €, ¿cómo lo tendrán que repartir?

50. Entre cuatro amigos se compran una plaza de garaje. Alberto aporta 3.200 €, Beatriz 8.000 €, Carlos 10.000 €. y David 5.300 €. Al cabo de un año la venden por 31.800 €. ¿Cómo tendrán que repartir el dinero?

6.4. Regla de tres inversa

Has visto cómo resolver cuestiones en las que aparecen magnitudes directamente proporcionales mediante la regla de tres directa. Vamos a ver ahora cómo resolver cuestiones en las que aparecen magnitudes inversamente proporcionales.

51. Un tren cuya velocidad media es de 80 km/h, tarda 5 horas en llegar a su destino. Queremos calcular cuánto tiempo tardará en hacer el mismo recorrido un tren cuya velocidad media es de 100 km/h.

a) Si sabes que el primer tren recorre 80 km en una hora, ¿qué distancia recorrerá en 5 horas?
b) Si ya sabes cuál es la distancia que tienen que recorrer ambos trenes, ¿cómo puedes calcular el tiempo que tardará el segundo tren?

Los pasos que has seguido para resolver esta cuestión han sido los siguientes:

- Primero has calculado la distancia recorrida por el primer tren. Para ello has tenido que multiplicar:
  - 80 km recorre en una hora - 5 horas = 400 km recorre en total.

- Luego has calculado el tiempo que tardará el segundo tren en recorrer estos 400 km. Para ello has tenido que dividir:
    - 400 km tiene que recorrer: 100 km recorre en una hora = 4 horas.

En la práctica se suele realizar de la siguiente forma:

X = tiempo que tardará el segundo tren

Llamamos X a la cantidad que se quiere calcular, en este caso el tiempo que tardará el segundo tren.

VELOCIDAD ------------------- TIEMPO

80 km/h ------------------- 5 horas

100 km/h ------------------- X

Se colocan los datos de forma que coincidan los de la misma magnitud uno debajo del otro.

$$x = \frac{80 \cdot 5}{100} = 4$$

Se multiplican los dos números que están en línea entre sí (80 · 5), y se divide el resultado por el número que está en línea con la X (en este caso el 100).

A esta forma de resolver las cuestiones sobre magnitudes inversamente proporcionales, se le llama regla de tres inversa.

No olvides que... ***Antes de aplicar la regla de tres directa o inversa es fundamental que compruebes si las magnitudes son directa o inversamente proporcionales.***

52. Con un tonel de vino se pueden llenar 200 botellas de $\frac{3}{4}$ de litro. ¿Cuántas botellas de 2 litro se podrán llenar?

53. Dos pintores se comprometen a pintar un edificio en 15 días de trabajo. El dueño quiere que el edificio esté pintado en 5 días. ¿A cuántos pintores tendrá que contratar?

54. Entre 8 personas se comprometen a realizar un trabajo, cobrando 800 € cada una. Como piensan que no les va a dar tiempo, deciden realizar dicho trabajo con dos personas más. ¿Cuánto cobrará al final cada una?

55. Una proporción es:

a) El cociente de dos números.
b) La razón de dos números.
c) La igualdad entre dos razones.
d) El producto de la razón de dos números por su cociente.

56. Dos magnitudes a y b son directamente proporcionales cuando:

a) Cuando una aumenta, la otra aumenta proporcionalmente.
b) Cuando una aumenta, la otra no varía.
c) Cuando una disminuye, la otra aumenta.
d) Cuando una aumenta, la otra disminuye.

6.5. Regla de tres compuesta

1) Para realizar una obra 40 obreros, trabajando 6 horas diarias, han necesitado 100 días. ¿Cuántos obreros, trabajando sólo 4 horas diarias se necesitarían para terminar la misma obra en 120 días?

<table>
<tr>
<td>Magnitudes que intervienen:

Número de obreros → <u>Incógnita</u>

Horas al día

Número de días</td>
<td>Planteamiento:
Inversa
Trabajando 6 horas al día → durante 100 días → se necesitan 40 obreros
Trabajando 4 horas al día → durante 120 días → se necesitan X obreros
Inversa</td>
</tr>
<tr>
<td>Análisis de proporcionalidad:
<u>Horas diarias y números de obreros</u>
A mas horas diarias se necesitan menos obrero
Al doble de horas diarias se necesitan la mitad de obreros } Inversa
<u>Días de trabajo y número de días</u>
A más días de trabajo se necesitan menos obreros
Al doble de días se necesitan la mitad de obreros } Inversa</td>
<td>Cálculo

$\frac{4}{6}x\frac{120}{100}=\frac{40}{X}\rightarrow X=\frac{40x6x100}{4x120}=50\ obreros$

Observa el cambio de lugar (en la fracción) que sufren las magnitudes inversamente proporcionales</td>
</tr>
</table>

2) Para alimentar las 248 máquinas de una fábrica durante 24 horas se gastan 89 280 euros. Si trabajan 12 horas 324 máquinas iguales, ¿cuánto gastarán?

<table>
<tr>
<td>Magnitudes que intervienen:

Número de máquinas

Horas de trabajo

Gasto → <u>Incógnita</u></td>
<td>Planteamiento:
Directa
248 máquinas → trabajando 24 horas → gastan 89.280 €.
324 máquinas → trabajando 12 horas → gastan X €.
Directa</td>
</tr>
<tr>
<td>Análisis de proporcionalidad:
<u>Número de máquinas y gasto que producen</u>
A mas máquinas se gasta más
Al doble de máquinas se produce el doble de gasto } Directa
<u>Horas de trabajo y gasto producido</u>
A más horas de trabajo más gastos se producen
Al doble de horas de trabajo doble de gastos } Directa</td>
<td>Cálculo

$\frac{248}{324}x\frac{24}{12}=\frac{89.280}{X}\rightarrow X=\frac{324x12x89280}{248x24}=58.320\ ptas.$

Observa que no hay cambio de lugar (en la fracción) de las cantidades correspondientes a las magnitudes directamente proporcionales</td>
</tr>
</table>

57. **Para recorrer una distancia de 15 000 Km. un pájaro tarda 20 días, volando durante 9 horas diarias. ¿Cuántos días tardará en recorrer 2000 Km., si vuela durante 12 horas diarias?** ***(Sol.: 2 días)***

58. **Con el vino contenido en recipiente llenamos 63 vasos de 12 centilitros de capacidad. Con el vino de otro recipiente que contiene la misma cantidad que el primero hemos llenado 42 vasos. ¿Qué capacidad tiene cada uno de estos vasos?** ***(Sol.: 18 Cl.)***

59. **Los 14 depósitos para el suministro de agua a una población tienen la misma capacidad. Para llenar 5 de ellos se necesitan 4 bombas que estén funcionando durante 10 horas. Si queremos llenar todos los depósitos, ¿durante cuánto tiempo deberán estar funcionando 8 bombas iguales a las mencionadas antes?** ***(Sol.:14 h)***

60. **He comprado 6 metros de cuerda que en total me han costado 80 €. ¿Cuánto me costarían 227 metros de dicha cuerda?** ***(Sol.:3026'7€)***

61. **Cuatro grifos llenan en 12 horas dos depósitos de agua de 60 m³ de capacidad cada uno. ¿Cuánto tiempo tardarían 6 grifos, iguales a los anteriores, en llenar 3 depósitos de 80 m³ cada uno?** ***(Sol.:16h)***

62. **Durante 15 días una familia compuesta por 6 personas ha gastado 900€ en alimentación. ¿Cuánto gastaría una pareja en 20 días?** ***(Sol.400 €):***

63. **Para pavimentar una calle de 600 m de largo y 24 m de ancho se han utilizado 36 000 adoquines. ¿Cuántos adoquines se necesitarían para otra calle de 500 m de largo y 30 m de ancho?** ***(Sol.:37.500 adoquines)***

64. **Por depositar 275.000 € en un banco me dan al año 15400 €. ¿Cuánto dinero me entregarán si deposito 100 € durante ese mismo tiempo?** ***(Sol.:5'6€)***

65. **Por labrar un campo de 1400 m de largo y 500 m de ancho se pagan 330€. ¿Cuánto habría que pagar por labrar otro de 420m de largo y 90m de ancho?** ***(Sol.:17'82€)***

66. **Veinte obreros han construido una piscina de 50 metros de largo. ¿Cuántos se necesitan para construir en el mismo tiempo que la anterior otra piscina de 40 m de largo y que tiene la misma anchura y la misma profundidad que la primera?** ***(Sol.:16 obreros)***

67. **¿Cuántos obreros serán necesarios para construir una piscina de 25,5 m de ancho, si 20 obreros realizan una de 30 m de ancho? (Ambas piscinas tienen la misma longitud y la misma profundidad.)** ***(Sol.:17 obreros)***

68. **Queremos construir una piscina en 60 días, para lo cual han de trabajar 20 obreros. ¿Cuántos serían necesarios para hacerla en sólo 40 días?** ***(Sol.:30 obreros)***

69. **Si 20 obreros trabajando 10 horas al día acaban una piscina, ¿cuántos se necesitan si trabajaran 8 horas diarias?** ***(Sol.:25 obreros)***

70. **Para realizar una piscina de 50 m de largo y 30 m de ancho, se necesitan 20 obreros que trabajan 10 horas al día. ¿Cuántos obreros, trabajando 8 horas diarias, construirán, en el mismo tiempo, una piscina de 40 m de largo y 25,5 m de ancho?** ***(Sol.:17)***

71. **Trata de calcular cuál será el peso de una persona de 40 años, si dicha persona a los 5 años de edad pesaba 22 Kg.** ***(Sol.: No se puede)***

72. **Seis obreros que trabajan durante 8 horas diarias han necesitado 19 días para montar 1368 aparatos iguales. ¿Cuántos aparatos montarán 5 obreros trabajando diariamente 10 horas durante 20 días?** ***(Sol.:1500 aparatos)***

73. **En una granja avícola hay 5600 gallinas que ponen 11200 huevos en 12 horas de luz. Si en la granja se sacrifican 2800 gallinas, ¿cuántos huevos habrá puesto durante tres horas, el resto de las gallinas?** ***(Sol.: 1400 huevos)***

74. **Para alimentar durante 24 días a 40 alumnos de un comedor escolar se necesitan 192 barras de pan. ¿Cuántas barras de pan habrá que comprar para alimentar a 65 alumnos durante 80 días?** ***(Sol.: 1040 barras)***

75. **¿Cuántas personas habrá que contratar para recolectar 50 tahullas de alcachofas, trabajando 8 horas diarias durante 10 días, si para recoger 120 tahullas se han necesitado 20 personas que han trabajado 6 horas diarias durante 16 días?.** ***(Sol.:10)***

76. **Para recoger el fruto de un campo de almendros, se necesitan 25 obreros trabajando 6 horas diarias durante 7 días. Si no disponemos más que de 15 obreros y queremos recoger el fruto en 5 días, ¿cuántas horas diarias tendrán que trabajar?** ***(Sol.: 14)***

77. **En el año 2000 cada uno de los 21 jugadores de la plantilla de un club de fútbol cobraban en concepto de primas 150.000 pesetas por partido ganado. Para pagarlas el club necesitó entonces 18.900.000 pesetas. La temporada siguiente cada jugador recibió 180.000 pesetas por partido ganado, y en total la directiva se gastó, en concepto de primas, 18 millones de pesetas. ¿Cuántos jugadores componían la plantilla en esa temporada?** ***(Sol.:No se puede saber si no nos dicen los partidos ganados)***

78. **La distancia por carretera entre dos ciudades es de 180 Km. y un autobús de transporte público ha tardado 2 horas y media en recorrería. ¿Cuánto tiempo ha empleado en recorrer 108 Km?** ***(Sol.: 1'5 horas)***

79. **Para que la longitud de un cable de acero crezca 0,004 cm. es necesario aumentar la temperatura en 200ºC. ¿Cuánto aumentará la temperatura si quiere que la longitud del cable aumente 0,02 cm?** ***(Sol.:1000ºC)***

80. **Para realizar una zanja de 9.000 m de largo, dos excavadoras trabajaron durante 6 días a razón de 8 horas diarias. Si se hubiera dispuesto de 4 excavadoras, trabajando 6 horas al día, ¿cuántos días habrían tardado en realizar una zanja de 4.500m. ?** ***(Sol.:2 días)***

81. **Un depósito puede suministrar diariamente 120 litros de agua durante 150 días a cada una de las 25 familias que viven en una urbanización. ¿A cuánto habría que reducir el consumo diario de cada familia, si el número de familias fuera 40, y si la misma cantidad de agua debe durar 50 días más?** ***(Sol.:56'25 litros)***

82. **Para recoger la cosecha de un olivar de 20 ha se emplea una cuadrilla de 25 personas durante 24 días a 6 horas diarias. ¿Cuántos días tardarán en recoger la oliva de otro campo de 8 ha si la cuadrilla está formada por 18 personas y trabajan 8 horas diarias?** ***(Sol.:10 días)***

83. **¿Qué beneficio entregará un banco a un cliente que depositó en él 45000 € durante 3 años, si anualmente y por cada 100 € depositadas el banco concede un beneficio de 7 €?** ***(Sol.: 9.450 €)***

84. **Una calle de 2400 m² se pavimenta con baldosas de 0,30 m de largo y 0,35 m de ancho. ¿Cuántas baldosas entrarán si tienen 0,4 m de largo y 0,3 m de ancho?** ***(Sol.:20.000 baldosas)***

7. Logaritmos

A las operaciones, ya conocidas, de Adición, Sustracción, Multiplicación, División, Potenciación y Radicación, añadimos una nueva que llamamos **Logaritmación**. Los logaritmos fueron introducidos en las matemáticas con el propósito de facilitar, simplificar o incluso, hacer posible complicados cálculos numéricos. Utilizando logaritmos podemos convertir: productos en sumas, cocientes en restas, potencias en productos y raíces en cocientes.

Definición de Logaritmo: Se llama logaritmo en base a del número x al exponente b al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$\mathbf{Log_a x = b \iff a^b = x}$$

Que se lee: "el logaritmo en base a del número x es b", o también: "el número b se llama logaritmo del número x respecto de la base a ". Como podemos ver, un logaritmo no es otra cosa que un exponente, hecho que no debemos olvidar cuando trabajemos con logaritmos. La constante a es un número real positivo distinto de 1, y se denomina base del sistema de logaritmos. La potencia ab para cualquier valor real de b solo tiene sentido si a > 0.

Es la función inversa de la función exponencial. La operación logaritmación (extracción de logaritmos, o tomar logaritmos) es siempre posible en el campo real cuando tanto la base a del logaritmo como el número x son positivos, (siendo, además, a distinto de 1)

7.1. Propiedades de los logaritmos

1. $Log_a 1 = 0$
2. $Log_a a = 1$
3. $Log_a a^x = x$
4. $a^{Log_a x} = x$
5. $Log_a(U \cdot V) = Log_a U + Log_a V$
6. $Log_a(U/V) = Log_a U - Log_a V$
7. $Log_a(U^n) = n \cdot Log_a U$
8. $Log_a(U^{1/n}) = (1/n) \cdot Log_a U$

7.2. Logaritmos Decimales:

Se llaman logaritmos decimales o vulgares a los logaritmos que tienen por base el número 10. Al ser muy habituales es frecuente no escribir la base.

$$\log_{10} x = \log x$$

7.3. Antilogaritmo:

Es el número que corresponde a un logaritmo dado. Consiste en el problema inverso al cálculo del logaritmo de un número.

$$\log_a x = y \quad <=> \quad a^y = x$$

es decir, consiste en elevar la base al número resultado.

7.4. Ecuaciones Logarítmicas:

Aquella ecuación en la que la incógnita aparece sometida a la operación de logaritmación. La igualdad de los logaritmos de dos expresiones implica la igualdad de ambas (principio en el que se fundamenta la resolución de ecuaciones logarítmicas, también se llama "tomar antilogaritmos").

$$\log_a x = \log_a y \quad <=> \quad x = y$$

Frecuentemente se resuelven aplicando las propiedades de los logaritmos antes enunciadas, en orden inverso, simplificando y realizando transformaciones oportunas.

7.5. Sistemas de Ecuaciones Logarítmicas:

Se llaman sistemas de ecuaciones logarítmicas a los sistemas de ecuaciones en los que la/s incógnita/s está sometida a la operación logaritmo. Se resuelven como los sistemas ordinarios pero utilizando las propiedades de los logaritmos para realizar transformaciones convenientes.

► Características Útiles:

- Si la base **a > 1:** Los números menores que 1 tienen logaritmo negativo. Los números mayores que 1 tienen logaritmo positivo. (En base 10: log 0,5 = - 0,30   log 100 = 2)
- Para **0<a<1** Los números menores que 1 tienen logaritmo positivo. Los números mayores que 1 tienen logaritmo negativo.

Ejercicios Resueltos.-

1. $10^{Log(7)} = 7$
2. $10^{2+Log(3)} = 10^2 \cdot 10^{Log(3)} = 100 \cdot 3 = 300$
3. $Log_8(64) + Log_4(64) = Log_8(8^2) + Log_4(4^3) = 2 + 3 = 5$
4. $Log_4(8) + Log_4(2) = Log_4(8 \cdot 2) = Log_4(16) = Log_4(4^2) = 2$
5. $Log_9(243) - Log_9(81) = Log_9(243/81) = Log_9(3) = Log_9(9^{1/2}) = 1/2 = 0{,}5$
6. $Log_7(2) + Log_7(0{,}5) = Log_7(2 \cdot 0{,}5) = Log_7(1) = 0$
7. $Log_5(375) - Log_5(3) = Log_5(375/3) = Log_5(125) = Log_5(5^3) = 3$
8. $Log_{0,25}(16) = Log_{0,25}(4^2) = Log_{0,25}((1/4)^{-2}) = Log_{0,25}(0{,}25^{-2}) = -2$
9. $Log_5(8 \cdot 10^{-3}) = Log_5(2^3 \cdot 10^{-3}) = Log_5(0{,}5^{-3} \cdot 10^{-3}) = Log_5(5^{-3}) = -3$
10. $Log_{16}(32) = Log_2(32)/Log_2(16) = Log_2(2^5)/Log_2(2^4) = 5/4 = 1{,}25$
11. $Log_{81}(27) = Log_3(27)/Log_3(81) = Log_3(3^3)/Log_3(3^4) = 3/4 = 0{,}75$
12. $Log_4(3x+1) = 2 \Rightarrow 4^{Log_4(3x+1)} = 4^2 \Rightarrow 3x+1=16 \Rightarrow 3x=15 \Rightarrow x=5$
13. $Log_x(343) = 3 \Rightarrow x^{Log_x(343)} = x^3 \Rightarrow x^3 = 343 \Rightarrow x = (343)^{1/3} \Rightarrow x = 7$
14. $Log_{x+1}(64) = 2 \Rightarrow (x+1)^{Log_{x+1}(64)} = (x+1)^2 \Rightarrow 64 = (x+1)^2 \Rightarrow 64 = x^2+2x+1 \Rightarrow x^2+2x-63 = 0 \Rightarrow$ $(x-7)(x+9) = 0 \Rightarrow x= 7$ solución válida
15. $Log_3(4x+1) = 4 \Rightarrow 3^{Log_3(4x+1)} = 3^4 \Rightarrow 4x+1 = 81 \Rightarrow x = 20$
16. $Log_x(5x-6)=2 \Rightarrow x^{log_x(5x-6)}=x^2 \Rightarrow x^2=5x-6 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-2)(x-3)=0 \Rightarrow x=2$ y $x=3$ son soluciones válidas

Ejercicios Resueltos:

Sabiendo que: Log (2) = a, Log (3) = b y Log (7) = c; entonces:

1. $Log(6)=Log(2 \cdot 3)=Log(2)+Log(3)=a+b$
2. $Log(49)=Log(7^2)=2Log(7)=2c$
3. $Log(5)=Log(10/2)=Log(10)-Log(2)=1-Log(2)=1-a$
4. $Log(2^{0,5})=0{,}5Log(2)=0{,}5a$
5. $Log(700)=Log(7 \cdot 100)=Log(7)+Log(100)=c+2$
6. $Log(0{,}125)=Log(125/1000)=Log(5^3/10^3)=Log((5/10)^3)=Log((1/2)^3)=Log(2^{-3})=-3a$
7. $Log(0{,}5)=Log(2^{-1})=-log(2)=-a$

85. **Ejercicios para Resolver:**

a) $Log_2(8) =$
b) $Log_3(27) =$
c) $Log_4(0{,}25) =$
d) $Log_4(8) =$
e) $Log_{27}(9) =$
f) $Log(1000) =$
g) $Log(0{,}01) =$
h) $Log(2x-7) - Log(x-1) = Log(5)$
i) $Log(2x-7) - Log(18) = Log(x)$
j) $Log(3x-2) + Log(6) = Log(5x)$
k) $2^x = 128$

l) $2^{(x-3)} = 16$
m) $2^{(5x+4)} = 8^x$
n) $7^{(5x+1)} = 49^{(3x+2)}$
o) $10^{x-1} \cdot 7^x = 25$
p) $4^x \cdot 3^y = 8$; $2^x \cdot 8^y = 9$

86. Ejercicios para Resolver:

Sabiendo que: Log(2) = a, Log(3) = b y Log(7) = c

a) Log(4) =
b) Log(6) =
c) Log(8) =
d) Log(9) =
e) Log(14) =
f) Log(21) =
g) Log(5) =
h) Log(15) =
i) Log(1,5) =
j) Log(0,5) =
k) Log(0,2) =
l) Log(12) =

87. Ejercicios para Resolver:

En cada caso calcular el valor de x:

a) $x = \text{Log}_8(16)$
b) $-3 = \text{Log}_3(x)$
c) $(4/3) = \text{Log}_x(10^{2/3})$
d) $-3 = 2\text{Log}_{25}(x)$
e) $x = \text{Log}_8(25) + \text{Log}_7((1/49)^{1/3})$
f) $\text{Log}_5(100) + \log_3(4) = x$

UNIDAD DIDÁCTICA 2
POLINOMIOS Y ECUACIONES

1. Lenguaje algebraico

Cuando combinamos en una expresión un conjunto de números y letras relacionadas por las operaciones aritméticas suma, resta, multiplicación y división, decimos que tenemos una **expresión algebraica**. A las letras de las expresiones algebraicas se les llama **variables**.

Si una información es expresada mediante expresiones algebraicas estamos utilizando un **lenguaje algebraico**. Ejemplos:

La velocidad del coche es el espacio dividido entre el tiempo: v $=\frac{e}{t}$

El precio final se calcula sumando el 7 % del IVA. Si el precio es x, con el IVA será: $x+\frac{7}{100}x$

El área de un triángulo es la medida de la base por la medida de la altura dividida entre dos:

$$a=\frac{bxh}{2}$$

Al número que se obtiene al sustituir las letras por números y hacer las operaciones correspondientes se le llama **valor numérico** de una expresión algebraica.

¿Cuál sería la velocidad de un coche que ha recorrido 200 kilómetros en un tiempo de 2 horas?

Si la velocidad es el espacio entre el tiempo tendríamos:

$$v=\frac{e}{t}=\frac{200}{2}=100 \text{ Km/h}$$

Si en una expresión algebraica solamente aparece la operación de multiplicar entre las variables decimos que tenemos un monomio. Recuerda que una potencia es una multiplicación.

A la parte numérica del monomio se llama coeficiente, y a las variables parte literal. La suma de los exponentes de las variables indica el grado del monomio.

Un coche lleva doble velocidad que un autocar, un avión lleva la velocidad del autocar al cuadrado y un tren lleva la tercera parte de la velocidad del avión.

Llamamos **v** a la velocidad del autocar, la velocidad del coche será **2·v**, la velocidad del avión será **1v**^{2}y la del tren **v**^{2}. Estas expresiones son monomios.

Vehículo	Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
Autocar	v	1	v	1
Coche	2.v	2	v	1
Avión	v^2	1	v^2 = v.v	2

Tren	$\frac{1}{3}v^2$	$\frac{1}{3}$	v^2	2

Aquellos monomios que tienen la misma parte literal se dicen que son **semejantes.** La velocidad del autocar y la velocidad del coche son monomios semejantes. La velocidad del avión y la del tren también son semejantes. En cambio, la velocidad del autocar y la velocidad del avión no son monomios semejantes.

1. Expresa, utilizando números y letras, los siguientes enunciados:

a) El valor de x kg de naranjas a 1,50 € el kilogramo.
b) El valor de y kg de manzanas a 1,20 € el kilogramo.
c) El valor de x kg de naranjas y de los y kg de manzanas de a) y b).
d) El cuadrado de un número e s igual a 225.
e) El cubo de un número es igual a 27.
f) La mitad de un número más la quinta parte de ese número.
g) El cuadrado de un número más el cubo de ese número.
h) El triple de x más el cuadrado de y más 5.
i) La mitad de la edad de Luis.
j) La mitad de la edad de Luis es 16 años.
k) La suma del cuadrado de un número y 30 es 46.
l) La suma de un número par y 14 es 58.
m) Un número impar más 23 es igual a 50.
n) La suma de tres números consecutivos es 114.
ñ) El número de patas de n conejos.

2. Escribe en lenguaje numérico o algebraico las siguientes frases del lenguaje usual :

a. El doble de 6.
b. El doble de cualquier número.
c. El cuadrado de 5.
d. El cuadrado de cualquier número.
e. La mitad de 20, más 7.
f. La mitad de un número cualquiera más 7.
g. El triple de la diferencia de dos números cualquiera.
h. La diferencia del cuadrado de dos números.
i. El cuadrado de la diferencia de dos números.
j. La suma del número 8 más su consecutivo.
k. La suma de un número más su consecutivo.

3. Indica cuál es el coeficiente y cuál la parte literal de estos monomios:

$a)\ 5x^2y^3$ b) $\frac{3}{4}abc$ c) x^3y^2

4. En las siguientes expresiones algebraicas, indica cuales son monomios y cuáles no. Reduce los monomios si es posible, y señala cual es la parte literal, el coeficiente y el grado.

Expresión algebraica	¿Monomio?	Reducido	Coeficiente	Parte literal	Grado
$25t^2xwxxw$		$25t^2x^3w^2$			2+3+2=7
8aabb					
$-226\ wmm^3w^2$					
$\frac{2x^3y^2}{z^3}$					

1.1. Valor numérico de una expresión algebraica

El valor numérico de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras por números.

$$\frac{3a^2+6b+c}{b} \quad \text{para } a=4,\ b=7,\ c=8 \quad \text{solución}=(14)$$

$$\frac{3a-2b^2}{3ab} \quad para\ \ a=-2\ \ b=3 \quad solución\ \frac{4}{3}$$

4bis. Si el precio de 1 Kg de patatas es x € y el de una docena de huevos es de y € escribe en forma de expresión algebraica:

a) El precio de 3 Kg de patatas
b) El precio de 5 Kg de patatas y de 2 docenas de huevos
c) ¿Cuál es el valor numérico de la expresión algebraica del apartado b) si x (precio de 1 Kg de patatas) vale 1,25 € e y (precio de la docena de huevos) vale 1,4 €?.

5. Llama x al ancho de una ventana. Si el alto es el doble del ancho más su tercera parte.

a) Expresa mediante una expresión algebraica la medida del alto de la ventana
b) ¿Cuánto medirá de alto si de ancho mide 75 cm?
c) ¿Y si el ancho es de 1,5 m?

1.2. Suma y resta de monomios y polinomios

► Suma y resta de monomios

Supongamos que tenemos una superficie que está formada por dos cuadrados. El área de uno de los cuadros es $2x^2$y el del otro es $4x^2$. ¿Cuál es la suma de sus áreas? ¿Y su diferencia?

Su suma es:

$2x^2 + 4x^2 = 6x^2$y su diferencia es: $4x^2 - 2x^2 = 2x^2$

Para poder sumar o restar monomios estos han de ser semejantes. El resultado es otro monomio que tiene por coeficiente la **suma o la resta de los coeficientes** y por parte literal la misma que tienen los monomios de partida.

6. Calcula estas sumas de monomios semejantes:

a) $5x^3 + 8x^3 - 2x^3$
b) $3x + 2x + 5x$

Cuando la expresión algebraica que nos queda está formada por la suma o resta de monomios no semejantes decimos que tenemos un **polinomio**.

► Suma y resta de polinomios

La suma o resta de dos polinomios es otro polinomio cuyos monomios se obtienen sumando o restando los monomios semejantes de los polinomios dados. Ejemplos:

$(3x^2 + 4xy)+ (2x^2 -xy)= 3x^2 + 4xy + 2x^2 - x y = 5x^2 + 3xy$

$(3x^2 + 4xy)-(2x^2 - xy) = 3x^2 + 4xy - 2x^2 + xy = x^2 + 5xy$

7. Realiza estas operaciones con monomios:

a) $x^2 + 2x^2$
b) $3x^3 - 5x^3$
c) $6x - 10x$
d) $9x^2 + 3x^2 - 12x^2$
e) $5x - 9x$
i) $60x - 20x$
j) $60x^2 + 40x^2 - 10x^2$
k) $-12x^2 - 9x^2 + 3x^2$
l) $-6x + 9x - 8x$
m) $-10x^2 + 13x^2 + 5x^2$

f) $8x^2 + 6x^2 - 2x^2$
g) $9x + 3x - 5x$
h) $8x^2 - 10x^2$
n) $6x - 12x + 15x$
ñ) $6y^2 - 14y^2 + 4y^2$
o) $7x^3 - 2x^3 + 5x^3$

8. Calcula el resultado en cada caso:

a) $(7x^2 + 5x - 1) + (2x^2 - x - 3) =$
b) $(3x - 1) - (3x + 2) =$
c) $(7x^2 + 5x - 1) - (2x^2 - x - 3) =$
d) $(3x^2 + x + 1) - (3x + 2) =$

1.3. Producto de monomios y polinomios

Producto de un monomio por un monomio

Supongamos que queremos calcular el área de una superficie rectangular cuyas medidas vienen dadas de forma general, ancho $3x^2$ y largo $2x^2y$.

El área será el producto de ambas medidas:

$A = (3x^2)\cdot(2x^2y)=(2\cdot3)(x^2\cdot x)(y) = 6\cdot x^{2+1}\cdot y = 6x^3y$

Multiplicamos los coeficientes y sumamos los exponentes de la variables:

$(4\,a\,x^4y^3)\cdot(x^2y)\cdot(3\,a\,b\,y) = (4\cdot1\cdot3)\cdot(a\cdot a)\cdot(x^4\cdot x^2)\cdot(y^3\cdot y\cdot y^3)\cdot(b^2) = 12\,a^2x^6y^7b$

Producto de un polinomio por un monomio

Para realizar esta operación tenemos que multiplicar el monomio por cada término o monomio que forman el polinomio.

$(3\,x^2)\,(2\,x^2y - 4\,y) = (3\,x^2)\,(2\,x^2\,y)+(3\,x^2)\,(-4\,y) = 6\,x^4y - 12x^2y$

Producto de un polinomio por un polinomio

Ahora tendremos que multiplicar cada monomio del primer polinomio por todos y cada uno de los monomios del segundo polinomio, y luego sumar o restar los monomios semejantes.

$(3\,x^2 + 2\,y)\cdot(2\,x^2y - 4\,y) = (3\,x^2)\,(2\,x^2y - 4\,y) + (2\,y)(2\,x^2y - 4\,y) =$

$(3\,x^2)\,(2\,x^2y) + (3\,x^2)\,(-4\,y) + (2\,y)\,(2\,x^2y) + (2y)\,(-4y) = 6\,x^4y - 12\,x^2y + 4\,x^2y^2 - 8\,y^2$

División de monomios

Para dividir monomios se dividen los coeficientes y se restan los exponentes de las letras.

$\mathbf{25x^7 : 5x^2 = 5x^5}$

9. Efectúa estas divisiones de monomios e indica el grado del cociente.

a) $(12x^7) : (2x^4) =$
b) $(21y^5) : (7y^4) =$
c) $(3a^4) : (2a^2) =$
d) $(15x^2) : (3x^2) =$

1.4. Potencias de polinomios: Identidades notables

Para calcular $(x + y)^2$

Tendremos que multiplicar: $(x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$

Hay tres **productos** que se denominan **identidades o igualdades notables**:

- ✓ Cuadrado de la suma: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- ✓ Cuadrado de la diferencia: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- ✓ Producto de una suma por una diferencia: $(x + y)\cdot(x - y) = x^2 - y^2$

10. Realiza estas operaciones:

a) $2X^2 \cdot 3x^4$
b) $2x^5 : x^2$
c) $4x^6 \cdot (-2x)$
d) $(-9x)(x^2)(-5x^5)$
e) $(2x)(3xy)(2x^2)$
f) $(3x)(-9y)(3x^2)$
g) $(x^2)(-2x)(3x)$
h) $8x^4 : 2x^2$
i) $10x^5 : 2x^2$
j) $60x^4 : 4x^2$
k) $(-12x^2)(-9x^2)(3xy)$
l) $(-6x)(9x)(-8x)$
m) $(-10x^3)(3x^2)(-5x^2)$
n) $(2xy)(2x)(5y^2)$
ñ) $15x^6 : 3x^3$
o) $(3y^2)(9y^2)(12y^2)$

11. Completa la tabla:

A	B	A + B	A · B	Grado +	Grado ·
$8x^2$	$-3x^2$				
$10x^2$	$\frac{1}{2}x^2$				
$-x^3$	$4x^2$				

12. Efectúa estas operaciones:

a) $(5x^2)\cdot(3x + 8x) + (6x)\cdot(-8x^2 + 5x^2) =$
b) $(8y^2)\cdot(5y) - 20y^3 =$
c) $(12x^7) : (2x^4) =$
d) $(21y^5) : (7y^4) =$
e) $(3a^4) : (2a^2) =$
f) $(15x^2) : (3x^2) =$

13. Ordena y reduce estos polinomios:

a) $5x^3 + 6x^2 - 4x^3 - 12x^4 - 6x + 9x - 3x^4 + 9 - 5 =$
b) $8x^2 - 5x^3 + 4x - 6x^2 + 2x - 5 =$

14. Calcula estas sumas de polinomios:

a) $(2x^3 - 5x^2 + 2x - 3) + (7x^3 - 5x^2 - 2x + 8) =$
b) $(4x^3 - 6x^2 + 8x - 2) + (-2x^3 - 8x^2 - 4x - 21) =$
c) $\left(\frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}y^2 - \frac{2}{3}\right) =$

15. ¿Cuál sería el opuesto de este polinomio?

$6x^2 - 2x^2 - 9x + 1$

16. Calcula:

a) $(5y^3 - 6y^2 + 2y - 3) - (8y^3 - 10y^2 - 10y - 4)$
b) $(12a^3 + 15a^2 - 4a - 3) - (-5a^3 - 9a^2 - 4a - 18) =$
c) $(21x^2 + 32x - 9) + (21x^2 - 41x^3 - 36x) - (16x^3 + 12 - 17x^2) =$

17. Calcula:

a) $(-3x^2)\cdot(2x^2 + 5x - 6)$
b) $(4y^2 + 9y^2 - 12y - 34)\cdot(4y^3) =$
c) $(16t + 12t^2 - 54t^3 + 9)\cdot(8t) =$
d) $(4x^3 - 12x^2 - 5x)\cdot(1/2x^3) =$
e) $(2x^2 - 3x - 5)\cdot(5x - 9)$
f) $(5y^3 + 7y^2 + 15y - 9)\cdot(6y - 12) =$

18. **Completa este cuadro:**

P(x)	Q(x)	P(x) + Q(x)	P(x) – Q(x)	P(x) · Q(x)
2x + 3	3x – 8			
$3y^2 + 5y + 1$	$-2y^2 - 2y + 9$			
$2t^2 - 4t + 8$	$\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$			

19. **¿Cuál es el resultado de la operación (2x - 3y) (3x + 4y)?**

20. **Mi hermana Ana tiene una deuda tres veces mayor que la mía, y mi amigo Pedro tiene la mitad de mi deuda más 500 €. ¿Cuál es la expresión algebraica del dinero que debemos entre los tres?**

21. **¿Cuál es el valor numérico de la expresión algebraica $2ab^2c + 3ab^2 - abc^2$ si a = 1, b = -3, c = 4?**

22. **Si nos dicen que el área de un cuadrado es $25x^2 + 70x + 49$, ¿sabrías calcular cuánto mide el lado?**

23. **Realiza las siguientes operaciones con polinomios:**

a. $(7x^3yz^2) \cdot (3x^4y^3zt^2) =$
b. $(5x^2y + 3xy^2) + 2(3x^3 - 2x^2y + xy^2 - 4y^3) =$
c. $3(5x^2y + 3xy^2) - 4(3x^3 - 2x^2y + xy^2 - 4y^3) =$
d. $(3x + y)(2x - 2y + 4) =$
e. $(4xy^2)^2 =$
f. $(3x - 5)^2 =$

24. **Un cuadrado tiene de lado 2x. Si le añadimos una pequeña cantidad y, ¿cuánto mide el lado ahora? Calcula el área de dicho cuadrado.**

25. **Calcular:**

a) $(x + 2)^2$
b) $(x + 3)^2$
c) $(x + 1)(x - 1)$
d) $(x^2 + 5)(x^2 - 5)$

1.5. Factorización. Regla de Ruffini

Factorizar polinomios consiste en descomponerlos en el producto de monomios. Hay varios métodos:

1. Sacar factor común: Es aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, Así, la propiedad distributiva dice: $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$

Si tenemos que factorizar la expresión 7x + 7y, basta aplicar la propiedad distributiva y decir que 7x + 7y = 7(x + y)

2. Aplicar la regla de Ruffini: Se empela para polinomios que tienen raíces enteras. Se trata de encontrar valores de x números enteros que al sustituirlos en el polinomio nos da cero.

Si un polinomio de, por ejemplo, cuarto grado $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ tiene cuatro raíces enteras, x_1, x_2, x_3 y x_4 se factoriza así:

$$\boxed{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}$$

Veamos un **ejemplo** factoricemos el polinomio: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

Para encontrar las raíces, vamos, probando los divisores del término independiente, en este caso de 12. O sea que se prueba con 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12 y –12

El método consta de una serie de **pasos**, que debemos seguir por orden:

1. Se colocan los coeficientes del polinomio completo, colocando 0 en los monomios que falten

2. A la izquierda se coloca el valor de **a** que aparece restando en el divisor:

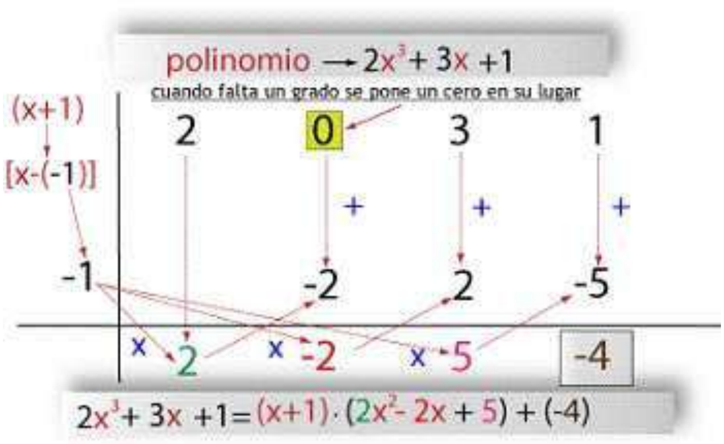
si es (x - a) ---> a si es (x + a) = (x -(-a)) ---> -a

3. Bajamos el primer coeficiente del polinomio dividendo, lo multiplicamos por el valor a la izquierda ---> a o -a) y se lo sumamos al siguiente coeficiente

4. Repetimos el proceso hasta llegar al último coeficiente del dividendo (que debe ser 0, si no, tenemos que usar otro valor)

5. El último nº obtenido es el resto de la división y los demás, son los coeficientes del polinomio cociente, en orden creciente.

En el ejemplo tienes desarrollada la división de $2x^3 + 3x + 1$ entre $x + 1$:



Veamos un ejercicio resuelto:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$$

	1	2	−7	−8	12
1		1	3	−4	−12
	1	3	−4	−12	0
2		2	10	12	
	1	5	6	0	
−2		−2	−6		
	1	3	0		

$P(x) = (x-1)\,(x^3 + 3x^2 - 4x - 12)$

$P(x) = (x-1)(x-2)\,(x^2 + 5x + 6)$

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = (x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$

26. **Divide por el método de Ruffini:**

a) $(-3x^4 - x^3 + 5x^2 - 3x + 6) : (x - 2) =$ b) $(2x^3 - 5x^2 + x + 3) : (x + 3) =$

c) $(x^4 + 3x^3 - 2x - 5) : (x - 3) =$

27. **Descompón en factores:**

a) $x^3 - x^2 + 4x - 4$ b) $3x^4 + 15x^2$

c) $x^3 - x - 6$ d) $x^4 - 16$

28. **Saca factor común a los siguientes polinomios:**

a) $x^3 + x^2$ b) $22x^4 + 4x^2$ c) $-44x^4 - 16$ d) $9x^4 - 4x^2 =$

e) $3x^5 - 18x^3 + 27x =$ f) $2x^3 - 50x =$ g) $2x^5 - 32x =$

29. **Factoriza y calcula las raíces de los polinomios:**

a) $x^2 - 4$ b) $4x^4 - 16$ c) $9 + 6x + x^2$ d) $x^4 - 10x^2 + 9$

e) $x^4 - 2x^2 + 3$ f) $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$ g) $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$

h) $x^3 - x^2 - 4$ i) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ j) $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$

k) $9x^4 - 4x^2 =$ l) $x^5 + 20x^3 + 100x =$ m) $3x^5 - 18x^3 + 27x =$

n) $2x^3 - 50x =$ ñ) $2x^5 - 32x =$ o) $2x^2 + x - 28 =$

30. **Descompón en factores los polinomios**

a) $25x^2 - 1 =$ b) $36x^6 - 49 =$ c) $x^2 - 2x + 1 =$

d) $x^2 - 6x + 9 =$ e) $x^2 - 20x + 100 =$ f) $x^2 + 10x + 25 =$

g) $x^2 + 14x + 49 =$ h) $x^3 - 4x^2 + 4x =$ i) $3x^7 - 27x =$

j) $x^2 - 11x + 30 =$ k) $3x^2 + 10x + 3$

2. Ecuaciones de primer grado con una variable

Cuando dos expresiones, numéricas o algebraicas, están unidas por el signo igual forman una **igualdad.**

Las **igualdades numéricas** pueden ser ciertas o falsas. Por ejemplo: 4 + 1= 6 - 1.

Es una igualdad porque hay dos expresiones numéricas unidas por el signo de igual. Es cierta porque el resultado de la operación es 5 en ambos lados de la igualdad.

En cambio, si la igualdad fuera 4 + 1 = 6 - 2, esta sería falsa.

2.1. Identidades y ecuaciones

Vamos a considerar el siguiente ejemplo: “Si sumo a mi edad mi edad, obtengo el doble de mi edad.” Si mi edad es **x** y le sumo mi edad que es **x**, obtengo el doble de mi edad que es **2x.** En forma de igualdad, sería: **x + x = 2x**

Si sustituimos la variable x por cualquier valor numérico comprobaremos que la igualdad es siempre cierta.

Valor de x	x + x	=	2x	resultado
10	10 + 10	=	2.10 =	20
15	15 + 15	=	2.15 =	30
20	20 + 20	=	2.20 =	40
25	25 + 25	=	2.25 =	50
50	50 + 50	=	2.50 =	100

Esta igualdad algebraica es una identidad.

Veamos otro ejemplo: “Si sumo a mi edad 15 años, obtengo el doble de mi edad.” En forma de igualdad sería: x + 15 = 2x. Si sustituimos la variable x por cualquier valor numérico, comprobaremos que sólo será cierta para uno de ellos.

Valor de x	x + 15	=	2 . x	resultado
10	10 + 15 = 25	≠	2.10 =	20
15	15 + 15 = 30	=	2.15 =	30
20	20 + 15 = 35	≠	2.20 =	40
25	25 + 15 = 40	≠	2.25 =	50
50	50 + 15 = 65	≠	2.50 =	100

La relación sólo se cumple cuando mi edad es de 15 años. La igualdad algebraica es una **ecuación**. A la variable de la ecuación, que en este caso es x, se le llama **incógnita**.

Decimos que las ecuaciones son de **primer grado o lineales** cuando el exponente de las incógnitas es uno.

En una ecuación, la parte de la izquierda se llama primer miembro y la parte de la derecha segundo miembro. Cada miembro de una ecuación está formado por términos:

x +	15	=	2x
término	término		término
1 ºmiembro		2 º miembro	

Las **soluciones** de la ecuación son los valores que hacen que la igualdad sea cierta. Las ecuaciones que tienen la misma solución se dice que son **equivalentes.** Ejemplo:

La solución de las siguientes ecuaciones es x = 2. Para comprobar basta con sustituir este valor en la incógnita de la ecuación:

$2x - 1 = 3$

$x + 5 = 7$

Sustituyendo, queda:

$2\cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$2 + 5 = 7$

2.2. Reglas para resolver ecuaciones de primer grado

► Regla de la suma

Si a los dos miembros de una ecuación le sumamos o restamos una misma expresión, numérica o algebraica, obtenemos otra ecuación equivalente a la que teníamos.

2x - 1 = 3

Sumamos la cantidad +1 en los dos miembros: 2x - 1 **+ 1** = 3 **+ 1**,

La ecuación que resulta es **2x = 4,** La solución de esta ecuación sigue siendo

2. Las ecuaciones **2x - 1 = 3** ; **2 x = 4** **;** **x = 2** son equivalentes.

► Regla del producto

Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente a la que teníamos.

2x = 4

Dividimos los dos miembros de la ecuación entre 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$$

Simplificando, queda: $x = \frac{4}{2}$ Luego x = 2,

Aplicando estas dos reglas, se van obteniendo ecuaciones cada vez más sencillas hasta llegar a una que tiene la forma general **a • x** = **b** , donde **a** y **b** son cualquier número y **x** la incógnita.

2.3. Resolución de ecuaciones de primer grado

Para resolver una ecuación hay que ir transformándola en otra más sencilla que sea equivalente. Usaremos las dos reglas anteriores. Ejemplo:

$4x + x = 7 + 2x + 8$

Agrupamos en cada miembro los términos semejantes: $5x = 2x + 15$

Utilizando la regla de la suma dejamos en un miembro las incógnitas y los números en el otro. En este caso restamos 2x en los dos miembros de la ecuación:

$5x - 2x = 2x - 2x + 15$

como $2x - 2x = 0$ podíamos haber escrito directamente $5x - 2x = 15$

A esto se llama transponer términos en una ecuación. Queda $3x = 15$

3- Para calcular cuánto vale x, dividimos los dos miembros de la ecuación entre 3:

Nos queda que $x = 5$, que es la solución de la ecuación.

2.4. Tipos de soluciones de una ecuación de primer grado

Al resolver una ecuación de primer grado podemos tener **tres tipos de soluciones**:

► Solución 1.

$$2x + 1 = 5$$

Resolviendo obtenemos: $x = 2$

Decimos que la ecuación es **compatible** porque tiene solución.

► Solución 2.

$$2x + 1 = 2(x + 1)$$

Resolviendo obtenemos: $0 \cdot x = 1$

Esta ecuación es **incompatible**. No tiene ninguna solución puesto que no hay ningún número que al multiplicarlo por cero nos de uno.

► Solución 3.

$$2x + 2 = 2(x + l)$$

De nuevo:

$2x + 2 = 2x + 2 \longrightarrow 2x-2x = 2-2$ **-->** $0x = 0$

Cualquier número multiplicado por cero da cero. Luego todos los números son solución de la ecuación. Realmente lo que tenemos no es una ecuación, sino una **identidad**.

31. Resuelve

a) $x - 15 = 2$
b) $x + 8 = 12$
c) $7x = -63$
d) $9x = 90$
e) $15x = 60$
f) $7x = 49$
g) $x - 12 = 26$
h) $x + 15 = 48$
i) $2x - 13 = 11$
j) $-3x = 9$

32. Completa:

1. Una ecuación es una _______________ que sólo se cumple para _______________ valor de la variable. A la variable de la ecuación, que en este caso es x, se le llama _______________ .
2. Decimos que las ecuaciones son de primer grado o lineales cuando el exponente de las incógnitas es _______________.
3. En una ecuación, la parte de la izquierda se llama _______________ y la parte de la derecha _______________ . Cada miembro de una ecuación está formado por _______________ .
4. Las _______________ de la ecuación son los valores que hacen que la igualdad sea cierta.
5. Las ecuaciones que tienen la misma solución se dice que son _______________ .

33. **Resuelve estas ecuaciones, pasando todos los términos con x a un miembro de la ecuación y los números a otros:**

a) 3x = 4 + 2x b) 11x = 10x −6 c) 9x = 8x −13

34. **Resuelve:**

a) 2x + 2 = x + 5
b) x - 5 = 3x - 25
c) x - 17 = 28 – 2x
d) 15x + 4 = 7x + 20
e) 3x - 2 = 4x – 7
f) 21 – 6x = 27 – 8x
g) 6x -3 = 2x + 1
h)10 + 2x = 7x - 15
i) -3x + 2 = x + 10
j) 2x - 7 = 3x – 8
k) 2x + 2 = x + 2
l) 5x + 6 = 10x + 5
m) 9x -11= -10 + 12x
n) 11x + 5x - 1= 65x – 36
ñ) 5x + 6x -81 = 7x + 102+ 65 x
o) 8x -4 +3x = 6x + 2x + 14
p) 16 + 7x – 5 + x = 11x - 3 – x

35. **Resuelve**

a) -2x + 6 = -4
b) -3x – 2 = 4
c) -5x + 20 = 10
d) -4x + 30 = 18
e) 3x – 6 = 0
f) 4x – 20 = 0
g) 5x – 15 = 0
h) 8x – 40 = 0

36. **Resuelve**

a) 3x – 2 = 4x -7
b) 6x – 3 = 2x +1
c) 10 +2x = 7x -15
d) -3x + 2 = x+10
e) 27 – 7 = 3x - 8
f) x – 7 = (x – 3)
g) 12 – (x – 3) = 6
h) 3(6 + x) = 2(x – 5)
i) 9(x – 1) = 6(x – 3)
j) 8(x -2) = 12(x – 3)

37. **Resuelve**

a) $x - \frac{x-1}{2} = 3$
b) $\frac{x+1}{8} - \frac{x-1}{6} + \frac{x+3}{5} = 2$
c) $\frac{x}{2} + \frac{x+2}{3} - \frac{x+3}{4} = 1$
d) $\frac{x-3}{2} - \frac{x-1}{6} = 1$
e) $\frac{x}{2} + \frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{4} = 1$
f) $\frac{3x+2}{5} - 7 = 2x - \frac{x+1}{2}$
g) $\frac{x-2}{6} - \frac{x+1}{3} + \frac{x-1}{2} = 0$
h) $\frac{3-x}{6} - \frac{x}{2} = \frac{1-x}{5} + \frac{2-x}{3}$

38. **Resuelve estas ecuación con paréntesis:**

a) 2 (x + 5) = 9x + 31
b) 3(a -1) – 2(a + 3)
c) 4 · (x – 6) = 2 · (x – 4)
d) 5(x – 1) – 12 = 2(x + 3)

39. **Resuelve:**

a) 2(7 – x) + 6x = 8 – 5(x – 1) + 8x + 4
b) 3(6 + x) = 2(x – 5)
c) 9(x - 1) = 6(x + 3)
d) (x - 7) = 2(x – 3)
e) 12 - (x - 3) = 6
f) 8(x - 2) = 12(x – 3)
g) (2x + 1) = 8 - (3x + 3)
h) 15x - 10 = 6x - (x + 2) +(-x + 3)
i) 16 + 15x) = x – 3(4 + x)
j) -3(6 - 6 x) - 3 = x – 4
k) – 6x = 3(5x + 8) – 3
l) (5-3x) - (-4x+6) = (8x +11)-(3x -6)

40. Resuelve estos problemas de ecuaciones

a) Halla el número que aumentado en 21 sea igual a 39.
b) Halla un número tal que al restarle 31 nos dé como resultado 13.
c) ¿Qué número multiplicado por 7 se convierte en 245 ?
d) Si al triple de un número se le resta 36 resulta 72. ¿ Cuál es el número.?
e) Si a un número se le suma su doble y su triple resulta 90. ¿Cuál es el número ?
f) Halla un número que es igual a su triple menos 16.
g) ¿ Qué número multiplicado por 3, y sumado luego 7 al producto, da 19.?
h) Halla un número al que sumado 72 resulta su duplo menos 46 unidades.
i) Busca un número cuyo cuádruplo es igual al mismo número aumentado en 36 unidades.
j) ¿Qué número sumado con su mitad da 81?
k) Si al doble de un número se le resta la mitad resulta 54. ¿Cuál es el número?
l) Reparte 2.830 euros entre dos familias, de modo que una reciba 750 euros más que la otra.
m) Calcula un número cuyo triple más 7 unidades da 22.
n) Calcula tres números naturales consecutivos cuya suma igual a 66.
o) Tengo 4 años más que mi hermano. Calcula nuestras edades sabiendo que entre los dos sumamos 56 años.

41. ¿Es x = 2 solución de la ecuación 3x + 4 - x = 7x + 1?

42. Indica si la expresión 3(x + 2)- 4 = 2(x + 1) + x, es una igualdad o una ecuación.

43. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4x + 5 - 3x = 2x + 6x - 9$
b) $5(x-3) - (x-1) = (x+3) - 10$
c) $\frac{x}{5} = 6$
d) $\frac{3x}{4} = \frac{x-1}{2}$
e) $\frac{2x+13}{3} - \frac{6-x}{4} = 1$
f) $\frac{3(x-1)}{4} + \frac{5x-7}{3} = \frac{3}{2}$

44. Practica resolviendo estas ecuaciones con denominadores:

$a)\ \frac{2x+17}{7} = 5$ b) $\frac{x+5}{2} = \frac{2x+3}{3}$ c) $\frac{2(x-7)}{4} - \frac{1-x}{10} = \frac{38+x}{5} - x$

d) $\frac{x}{4} + 5 = \frac{2x}{3}$ e) $\frac{2x-1}{3} = \frac{4x+2}{5}$

$f)\ \frac{5(x-3}{4} - \frac{x-1}{3} = \frac{4x}{5} + 2x + 1$ g) $3 + \frac{30-2x}{4} = 8 + \frac{x}{2}$

h) $\frac{4}{x-3} = \frac{5}{x-2}$ i) $\frac{3x+9}{10} - \left(2x + \frac{4x}{7}\right) = x - \frac{6x}{2} - 1$

g)

$j)\ \frac{3x+7}{24} - 1 = -\frac{1}{3}$ k) $\frac{x+11}{6} - \frac{x+5}{3} = 0$

l) $\frac{5(x-4) - 3(2+x)}{2} = \frac{3(5x-2)}{4} - 8x - 1$ m) $\frac{x}{6} + 5 = \frac{1}{3} - x$

45. Resuelve la siguiente ecuación e indica qué tipo de solución tiene:

.$4(x-3) + 4 = 2(x-1) + 2x + 3$

46. Si me pagaran 60 € tendría el doble de lo que tengo ahora más 10 €. ¿Cuánto tengo?

47. **Tres cestos contienen 575 manzanas. El primer cesto 10 manzanas más que el segundo y 15 más que el tercero. ¿Cuántas manzanas hay en cada cesto?**

48. **Dos autobuses salen a la vez, uno desde Lleida y otro desde Zaragoza, hacia Madrid. La distancia entre estas dos ciudades es de 126 km. Para ir de Lleida a Madrid debemos pasar por Zaragoza. El autobús que sale de Zaragoza circula a una velocidad media de 63km / h. ¿A qué velocidad circula el de Lleida, si alcanza al otro al cabo de 6 horas?**

49. **Un ciclista sale de su casa en bicicleta a las 8 de la mañana. Cuando ya lleva un rato pedaleando se le estropea la bicicleta y tiene que volver andando. Calcula a qué distancia de su casa se le estropeó la bicicleta, si andando va a una velocidad media de 6 km / h y en bicicleta a 30 Km / h y regresó a su casa a las 2 de la tarde.**

50. **Queremos plantar unos árboles formando un cuadrado. Si los colocamos en un cuadro de c árboles por lado nos sobran 6, pero si intentamos formar un cuadrado con un árbol más por lado, nos faltan 19. ¿Cuántos árboles tenemos para plantar?**

51. **La propietaria de una tienda de ropa encarga a un almacén 12 chaquetas y 48 faldas. Las chaquetas son 75 € más cara que las faldas. La factura asciende a 3.600 € ¿Cuál es el precio de cada artículo?**

52. **En una tienda te hacen 20 % de descuento, pero te cargan el 12 % de IVA. ¿Qué prefieres que te hagan primero el descuento o el IVA?**

53. **Las instrucciones de un libro de cocina para asar el redondo de ternera dicen que se ase 20 minutos por cada kilo de carne y un cuarto de hora de propina. Hemos asado un redondo durante hora y cuarto. ¿Cuánto pesaba?**

54. **¿Es $x = 4$ la solución de la ecuación $2(3x - 4) - 3(x + 5) = -11$?**

55. **La edad de Pedro es el triple de la de Juan y ambas edades suman 40 años. Hallar ambas edades.**

56. **En un corral hay conejos y gallinas; en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?**

57. **Antonio le dice a Juan: "El dinero que tengo es el doble del que tienes tú" y Juan le dice a Antonio: "si tú me das 6 euros, tendremos los dos igual cantidad" ¿Cuánto dinero tiene cada uno?**

58. **Resuelve estos problemas planteando las ecuaciones**

1) Un padre tiene 36 años y su hijo 10, ¿cuántos años tienen que pasar para que la edad del padre sea el doble de la del hijo?

2) ¿Con cuánto dinero salí de casa esta mañana, si después de gastar la tercera parte y 70 euros. Todavía me queda la quinta parte de lo que tenía?

3) ¿Cuál es mi sueldo mensual teniendo en cuenta que si a su mitad le resto 100 euros obtengo lo mismo que si su décima parte la multiplico por cuatro?

4) Dos grupos de amigos salen a la vez, unos desde Lugo y otros desde Ciudad Real, con intención de encontrase en el camino. La distancia entre estas dos ciudades es de 690km. ¿En qué punto del camino se encontrarán, si los de Lugo circulan a 68 km/ h y los de Ciudad real a 70 km / h.

5) Dos trenes salen de la misma estación, a la vez y en sentido opuesto, a la velocidad de 72 km / h y 80 km / h. ¿Al cabo de cuánto tiempo se encontrarán a 988 km de distancia?

6) ¿Qué cantidad de vino de 1,20 €/l hay que mezclar con 40 litros de otro vino, de 1,50 €/ l para obtener una mezcla de 1,325 €/l?

7) En la papelería nos han cobrado 6,20 € por 15 lápices y 8 bolígrafos. Sabemos que el precio de los bolígrafos es el doble que el precio de los lápices. ¿Cuánto cuesta un lápiz y cuanto un bolígrafo?

8) **.-** Calcula el valor de **y** si el perímetro de esta piscina es 348. (hacer el dibujo)

9) **.-** Calcula un número cuyo triple más 7 unidades da 22.

10) **.-** Calcula tres números naturales consecutivos cuya suma igual a 66.

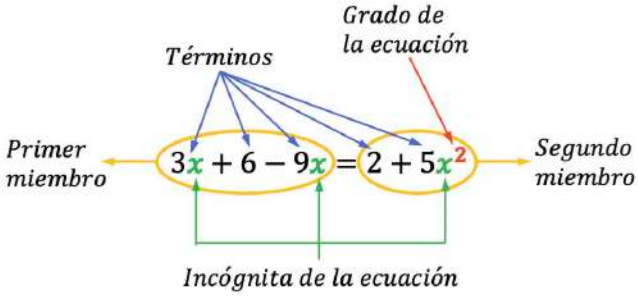
11) .- Tengo 4 años más que mi hermano. Calcula nuestras edades sabiendo que entre los dos sumamos 56 años.

3. Ecuaciones de segundo grado con una variable

Sabemos que una ecuación es una igualdad algebraica que sólo es cierta para algunos valores de las incógnitas. Hasta ahora, hemos trabajado con ecuaciones de primer grado con una incógnita. Pero no todas las ecuaciones son así.

Cómo resolverías la ecuación $3x + 6 - 9x = 2+5x^2$

Si analizamos sus términos vemos que no corresponde con una ecuación de primer grado:



3.1. Forma general de una ecuación de segundo grado

Las ecuaciones de segundo grado son aquellas en las que en uno de sus términos aparece la **incógnita elevada al cuadrado**.

Fíjate que una ecuación de segundo grado puede tener **dos soluciones.**

La forma general de estas ecuaciones es:

$$ax^2+bx + c = 0$$

Donde **x** es la incógnita o variable y **a, b** y **c** son números o coeficientes.

ax^2—>Es el término cuadrático. (**a** es el coeficiente principal)

bx—>Es el término lineal.

c —>Es el término independiente.

Puede suceder que nuestra ecuación esté desordenada. Antes de usar un método para resolverla hay que agrupar los términos que son semejantes. Ejemplo:

$3(x^2+x)-2(x + 5) = 3x^2+x -10$

3.2. Resolución de ecuaciones incompletas de segundo grado

Decimos que una ecuación es incompleta cuando le falta alguno de los términos que aparece en la expresión general.

a) Si el coeficiente b es cero el término $b \cdot x = 0 \cdot x = 0$, la ecuación que queda es: $ax^2+ c = 0$

Esta ecuación se resuelve como una de primer grado.

$4x - 16 = 0$ —> $4x^2 =16$ —> $x^2 = \frac{16}{4}$

Para calcular el valor de x hay que hacer una raíz cuadrada:

$x = 2$

$x = \pm\sqrt{4}$ $\qquad$ $x = -2$

b) Si el coeficiente c es cero, la ecuación que nos queda es:

$ax^2 +bx= 0$

Esta ecuación se puede escribir como el producto de dos números $x(ax+ b) = 0$, uno de ellos es x y el otro es (ax + b).

Para que el producto de dos números sea cero, uno de ellos ha de ser cero. Luego las soluciones son:

x = 0 ax+ b = 0

$$\mathbf{3x^2 + 6x = 0} \rightarrow x \cdot (3x+6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 6 = 0 \rightarrow 3x = -6 \rightarrow x = \dfrac{-6}{3} = -2 \end{cases}$$

c) Si el coeficiente b y c son cero, la ecuación que nos queda es $ax^2 = 0$

La única solución posible de esta ecuación es que **x = 0**.

3.3. Resolución de la ecuación completa de segundo grado

La ecuación $\mathbf{ax^2+bx + c = 0}$ se resuelve mediante la siguiente expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo: $\mathbf{x^2-5x + 6 = 0}$

Identificamos los coeficientes: a = 1, b = -5, c = 6. Sustituimos en la solución:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2.a} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = < \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

3.4. Soluciones de una ecuación de segundo grado

El número de soluciones de la ecuación de segundo grado depende del signo del radicando, es decir, del signo que tenga el número que está dentro de la raíz cuadrada, y que se obtiene al sustituir los valores correspondientes en la expresión $\mathbf{b^2 -4ac}$. Podemos encontrar tres casos:

a) Si $b^2 -4ac$ es un número positivo, la ecuación tiene dos soluciones.

Ejemplo:

$\mathbf{x^2-7x + 10 = 0}$

a = 1, b =-7, c = 10

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2.a} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4.1.10}}{2.1} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = < \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}$$

Tiene dos soluciones ya que 49 – 40 es un número positivo.

b) Si $b^2 -4ac$ es cero, la ecuación tiene dos soluciones que son iguales. Decimos que la solución es doble.

Ejemplo:

$\mathbf{x^2- 6x + 9 = 0}$

a = 1, b = -6, c = 9

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2.a} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4.1.9}}{2.1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = < \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix}$$

Tiene una única solución que es doble, x = 3, ya que 36 -36 = 0

c) Si $b^2 -4ac$ es un número negativo, la ecuación no tiene solución ya que no existe la raíz

cuadrada de un número negativo.

Ejemplo:

$\mathbf{2x^2 + 3x + 3 = 0}$ a = 2, b = 3, c = 3

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-24}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{-15}}{4}$$

La ecuación no tiene solución puesto que no existe la raíz de un número negativo, en este caso es -15.

59. **Resuelve estas ecuaciones**

a) $x^2 - 4 = 0$	b) $7x^2 - 5x = 0$	c) $4x^2 + 3x = 7$
d) $9x^2 = 3 - 2$	e) $x^2 + 3x = 3(x+3)$	f) $2x^2 - 7x = 0$
g) (x+5)(x-5)= 0	h) $4x^2 - 11x = 10$	i) $x^2 + x = 3x - 1$
j) $3x^2 - 8x - 3 = 0$	k) $2x^2 - 7x - 4 = 0$	l) $6x^2 + x - 2 = 0$
m) $x^2 + 7x + 10 = 0$	n) $4x^2 - 12x + 9 = 0$	o) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

60. **Calcula dos números sabiendo que su diferencia es 8 y su suma 65.**

61. **Averigua las dimensiones de un rectángulo que tiene un perímetro de 40 cm y un área de 96 cm²**

62. **Un terreno de forma rectangular se vende a 5 €/m² ¿Cuánto vale en total si su diagonal mide 13 m. y la longitud de uno de sus lados es 2m mayor que el doble del otro?**

63. **Si se amplía el lado de un cuadrado en 5 cm. su área vale 361 cm². ¿Cuánto mide el lado del cuadrado inicial?**

64. **Resolución de ecuaciones por Ruffini**

a) $x^2 - 4=0$	b) $4x^4 - 16 =0$	c) 9 + 6x + x2 =0	d) x^4 – 10x2 + 9=0
e) $x^4 - 2x^2 + 3=0$	f) $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6=0$		g) $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3=0$
h) $x^3 - x^2 - 4=0$	i) $x^3 + 3x^2 - 4x = 12$		j) $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2=0$

4. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

4.1. Métodos para resolver sistemas de ecuaciones

Existen tres métodos para resolver un sistema de ecuaciones. El método de **sustitución**, el de **reducción** y el de **igualación**. El objetivo de cualquiera de estos métodos es reducir el sistema a una ecuación de primer grado con una incógnita. La solución obtenida siempre será la misma, independientemente del método elegido.

► Método de sustitución

Este método despeja una de las dos incógnitas en función de la otra en una de las dos ecuaciones. Luego sustituye el valor obtenido en la otra ecuación. Ejemplo:

$\boldsymbol{x + y = 6}$
$\boldsymbol{x - y = 4}$

1º Despejamos x o y en una de las dos ecuaciones. Por ejemplo, **y** en la primera:

y = 6 — x

2º Sustituimos este valor en la otra ecuación. En este caso, en la segunda:

x - (6 - x) = 4

Nos queda una ecuación con una sola incógnita, que resolvemos:

$$x-(6-x)=4 \Longrightarrow x-6+x=4 \Longrightarrow 2x=4+6 \Longrightarrow 2x=10 \Longrightarrow x=\frac{10}{2}=5$$

3º Calculamos el valor de la otra incógnita: y = 6 — x —>y = $y=6-x \Longrightarrow y=6-5=1$

La solución que se obtiene es: (x,y) = (5,1)

4º El último paso es comprobar que la solución obtenida está bien:

$$\begin{array}{ll} x+y=6 & 5+1=6 \\ x-y=4 & 5-1=4 \end{array}$$

▶ Método de reducción

Con este método se trata de eliminar una incógnita buscando sistemas equivalentes en donde los coeficientes de una misma incógnita sean opuestos.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x+2y=25} \\ \boldsymbol{2x+3y=40} \end{aligned}$$

Queremos que una de las dos incógnitas tenga en ambas ecuaciones el mismo coeficiente pero con distinto signo. Por ejemplo, la incógnita **x** en la primera ecuación ha de tener un **-2**. Para ello transformamos la ecuación en otra equivalente multiplicándola por -2, y sumando ambas nos queda:

$$\begin{array}{c} -2(x+2y=25) \\ 2x+3y=40 \end{array} \qquad \begin{array}{l} -2x-4y=50 \\ 2x\ +3y=40 \\ \boldsymbol{0\ +y=-10} \quad \Longrightarrow \boldsymbol{y=10} \end{array}$$

La otra incógnita se obtiene sustituyendo el valor de y en una de las dos ecuaciones iniciales. Por ejemplo, en la primera:

$$x+2y=25 \quad \Longrightarrow \quad x+2.10=25 \quad \Longrightarrow \quad x=25-20 \quad \Rightarrow \quad x=5$$

La solución del sistema es: $(x, y)=(5,10)$

▶ Método de igualación

En este método hay que despejar la incógnita **x** o **y** en las dos ecuaciones. Luego se igualan sus valores, obteniendo una ecuación lineal con una sola incógnita. Ejemplo:

1º Despejamos x o y en ambas ecuaciones.

Observa los coeficientes de las incógnitas. Es más cómodo despejar la incógnita que tiene de coeficiente uno, en este caso es la **y**.

$$\begin{array}{c} 2x-y=-1 \\ 3x+y=11 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} y=2x+1 \\ y=-3x+11 \end{array}$$

2º Si los primeros miembros son iguales, también lo son los segundos. Por tanto, podemos igualarlos. Obtenemos una ecuación con una sola incógnita, en este caso **x**.

$$2x+1=-3x+11 \Rightarrow 2x+3x=11-1 \Longrightarrow 5x=10 \Longrightarrow x=\frac{10}{5}=2$$

Nos falta calcular la otra incógnita. Podemos sustituir en cualquiera de las dos ecuaciones.

$y=2x+1 \qquad y=2.2+1=4+1=5$

La solución del sistema es: $(x, y)=(2,5)$

4.2. Tipos de soluciones de los sistemas de ecuaciones

Al resolver las ecuaciones lineales de primer grado podíamos tener distintos tipos de soluciones. Con los sistemas de ecuaciones pasa exactamente lo mismo. Cuando un **sistema tiene solución** decimos que este es **compatible**.

Los sistemas compatibles pueden tener una **única** solución. Entonces el sistema es **compatible determinado.**

Si tiene **infinitas** soluciones decimos que el sistema es **compatible indeterminado.**

Pero no todos los sistemas tienen solución. Por ejemplo:

$x + y = 20$

$x + y = 30$

No existen dos números que sumen 20 y 30 a la vez. Cuando un sistema no tiene solución se dice que es **incompatible**.

65. **Resuelve el siguiente sistema por el método de sustitución (ER1, pag 17)**

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 48 \\ x - y = 1 \end{array}\right\}$$

66. **Resuelve el siguiente sistema por el método de igualación:**

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{array}\right\}$$

67. **Resuelve el siguiente sistema y piensa qué tipo de solución tiene. Utiliza el método de reducción.**

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 7 \end{array}\right\}$$

68. **Resuelve el siguiente sistema y di que tipo de solución tiene. Utiliza el método de reducción.**

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{array}\right\}$$

69. **¿Cuál es la solución de la ecuación 5x – 3y = 4 si x vale -1? (averigua el valor de la y)**

70. **Comprueba si es correcta o no la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 10 \\ x + 3y = 8 \end{array}\right\}$ Sol : x = 5, y = 0

b) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 22 \\ 2x + 3y = 6 \end{array}\right\}$ Sol : x = 6, y =-2

c) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 5y = 9 \end{array}\right\}$ Sol: x = 2, y = 1

71. **Resuelve por el método de igualación. Indica el tipo de solución que tiene cada uno de estos sistemas**

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 6 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 4x + 6y = 2 \\ 6x + 9y = 3 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{l} 3x + y = 10 \\ 2x + 3y = 9 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 10 \end{array}\right\}$

1. Compatible determinado:
2. Compatible indeterminado
3. Incompatible
4. Doble

72. **Resuelve estos sistemas de ecuaciones**

a) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x+2y=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+4y=5 \\ 2x-3y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+4y=11 \\ -6x+2y=8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+4y=18 \\ 2x-5y=10 \end{cases}$ f) $\left.\begin{matrix} 2x-5y=-11 \\ 3x+4y=-5 \end{matrix}\right\}$

g) $\left.\begin{matrix} 2x-y=7 \\ 3x-2y=-7 \end{matrix}\right\}$ h) $\left.\begin{matrix} y+x=4 \\ y=2x+1 \end{matrix}\right\}$ i) $\left.\begin{matrix} x+3y=2 \\ 2x+6y=3 \end{matrix}\right\}$

j) $\left.\begin{matrix} 2x+y=9 \\ 3x-2y=10 \end{matrix}\right\}$

4.3. Problemas de sistemas de ecuaciones: aplicación al movimiento

Ejemplo de movimiento:

Una barca que hace el servicio de llevar pasajeros por el río Guadiana los traslada de Badajoz a Mérida, distantes 75 km, en 3 horas, y de Mérida a Badajoz en 5 horas. Hallar la velocidad del barco y la de la corriente del río si estas se suponen constantes.

Cuándo vamos de Badajoz a Mérida, la velocidad que llevamos es la de la barca menos la del río, y cuando vamos de Mérida a Badajoz la velocidad que llevamos es la velocidad de la barca más la del río, y esta velocidad es el espacio, 75 km, dividido entre el tiempo que tardamos en llegar.

$$v_{barca} - v_{rio} = 15$$
$$v_{barca} + v_{rio} = 25$$

Ejemplo de edades:

Hace tres años la edad de Elisa era el triple que la de Manuel. Dentro de tres años, la edad de Elisa será el doble que la de Manuel. ¿Qué edad tienen actualmente cada uno?

$$hace\ tres\ años \implies (x-3) = 3(y-3)$$
$$dentro\ tresaños \implies (x+3) = 2(y+3)$$

Ejemplo de mezclas:

Un comerciante tiene dos tipos de café, natural y torrefacto. El natural vale 1,25 € el kilo y el torrefacto vale a 1,60 € el kilo. Quiere hacer una mezcla y obtener 100 kg de café a 1,50 € el kilo. ¿Cuántos kilos de cada tipo ha de mezclar si no pretende ganar ni perder en la operación?

$$x + y = 100$$
$$1{,}25x + 1{,}60y = 1{,}50\ .100$$

73. **Alberto y Teresa salen juntos una tarde, llevando entre los dos 100 euros. En el cine gastan 8 euros cada uno y a la salida observan que a Teresa le queda el doble de dinero que a Alberto. ¿Con cuánto dinero salieron de casa cada uno?**

74. **Dos coches se mueven en sentidos contrarios, dirigiéndose el uno al encuentro del otro con velocidades de 4 y 5 m/s respectivamente. Sabiendo que el encuentro tiene lugar a 152 m de la posición de partida del primero, calcular la distancia entre los dos coches al comenzar el movimiento y el tiempo transcurrido hasta que se encontraron.**

75. **Dos coches parten del mismo punto a la vez. Llevan el mismo sentido y su trayectoria es una recta. El primero se mueve con movimiento uniforme con velocidad 10 m/s. El segundo se mueve**

partiendo del reposo con aceleración constante de 4 m/s2. ¿Cuánto tiempo tardarán en reunirse de nuevo y qué espacio habrán recorrido en ese tiempo?

76. **Un librero vendió 84 libros a dos precios: unos a 45 € y otros a 36 €, y obtuvo de la venta 3.105 €. ¿Cuántos libros vendió de cada clase?**

77. **En la prensa ha aparecido la siguiente noticia: "La DGT recomienda mantener la distancia de seguridad en la conducción, porque un automóvil a 50 Km/h necesita tres segundos para frenar". La pregunta que podemos hacernos a raíz de la noticia es: ¿cuál es la mínima distancia de seguridad recomendada por la DGT?**

5. Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas (Método de Gauss)

Concepto de combinación lineal: Ejemplos: Dado el Sistema $\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ 3x+2y-z=1. \\ x+y+z=5 \end{cases}$

Una combinación lineal de las ecuaciones E_1, E_2 y E_3 es una nueva ecuación que se obtiene al multiplicar cada ecuación por un número y después sumar los resultados, por ejemplo: $2E_1-7E_2+4E_3$

Una combinación lineal de E_1 y E_2 es, por ejemplo: $-3E_1+4E_2$

Una combinación lineal es una nueva ecuación que se obtiene al multiplicar cada ecuación por un número y después sumar los resultados.

En un S.E.L. si una ecuación es combinación lineal de otras, se puede suprimir, ya que no aporta información.

Diremos que un conjunto de ecuaciones son linealmente independientes cuando no se puede expresar ninguna ecuación como combinación lineal de las restantes.

Una ecuación es combinación lineal de otras	$\longleftrightarrow$	Se puede suprimir dicha ecuación.	$\longleftrightarrow$	Las ecuaciones son linealmente **de**pendientes.
Ninguna ecuación es combinación lineal de otras	$\longleftrightarrow$	No se puede suprimir ninguna ecuación.	$\longleftrightarrow$	Las ecuaciones son linealmente **inde**pendientes.

Al resolver un sistema nos tenemos que quedar con las ecuaciones que no se pueden expresar como combinación lineal del resto, es decir, con las ecuaciones que sean linealmente independientes.

Sistemas escalonados.

	Se resuelven de "abajo" a "arriba"
$\begin{cases} x-3y+2z=7 \\ 5y-z=6 \\ 3z=12 \end{cases}$	$z=12/3$
$\begin{cases} x+2y \quad -t=5 \\ y+z \quad =8 \\ z+3t=11 \end{cases}$	$t=\lambda \rightarrow \mathrm{z}=11\text{-}3\lambda$
$\begin{cases} x-y+z+t=4 \\ y+z+2t=3 \end{cases}$	$t=\lambda$ y $z=\mu \rightarrow y=3-\mu-2\lambda \quad \uparrow$

En los sistemas escalonados, no sobra ninguna ecuación, ninguna ecuación es combinación lineal del resto, los sistemas están formados por ecuaciones linealmente independientes.

Método de Gauss.

Sirve para resolver **cualquier** sistema de ecuaciones lineales. Consiste en transformar un sistema en otro sistema escalonado, y resolver éste último.

Procedimiento:

- Se sustituye una ecuación por una combinación lineal de ella y de otra ecuación.

- Se empieza haciendo "ceros" en la primera columna, después se pasa a la segunda columna y así sucesivamente.

- Para hacer "ceros" en la primera columna, siempre uso la primera ecuación, para hacer ceros en la segunda columna uso la segunda ecuación y así sucesivamente.

- La notación $E_2 \rightarrow 2E_1-3E_2$ significa que sustituyo la 2ª ecuación por la combinación lineal que resulta al multiplicar la 1ª ecuación por "2" y la 2ª ecuación por "-3".

Para hacer ceros: $\begin{cases} ax+by+\dots \\ cx+dy+\dots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{cases} E_2 \rightarrow -cE_1+aE_2 \begin{cases} ax+by+\dots \\ \quad my+\dots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{cases}$

1º Paso		2º Paso	
$\left\{\begin{array}{ccccc} \square & \square & \square & \square = & \square \\ \square & \square & \square & \square = & \square \\ \square & \square & \square & \square = & \square \\ \square & \square & \square & \square = & \square \end{array}\right.$	Para hacer ceros en la **primera** columna, usamos la **primera** ecuación, que no se modifica.	$\left\{\begin{array}{ccccc} \square & \square & \square & \square = & \square \\ 0 & \square & \square & \square = & \square \\ 0 & \square & \square & \square = & \square \\ 0 & \square & \square & \square = & \square \end{array}\right.$	Para hacer ceros en la **segunda** columna, usamos la **segunda** ecuación, que no se modifica.

3º Paso	
$\left\{\begin{array}{ccccc} \square & \square & \square & \square = & \square \\ 0 & \square & \square & \square = & \square \\ 0 & 0 & \square & \square = & \square \\ 0 & 0 & \square & \square = & \square \end{array}\right.$	Para hacer ceros en la **tercera** columna, usamos la **tercera** ecuación, que no se modifica

Y así sucesivamente…

Fundamento teórico del Método de Gauss:

Dos sistemas son equivalentes, cuando tienen las mismas soluciones.

Aplicando cualquiera de las siguientes transformaciones a un sistema se obtiene uno equivalente.

1) Multiplicar o dividir una ecuación por un número distinto de cero.
2) Sumar a una ecuación otra del sistema.
3) Cambiar el orden de las ecuaciones del sistema.
4) Sustituir una ecuación por una combinación lineal de ella y de otra ecuación, siempre y cuando el número que multiplica a la ecuación que se sustituye sea distinto de cero

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} 2x+y-3z=-2 \\ 3x-2y+z=13 \\ -5x-4y+2z=4 \end{cases}$$

Empezamos haciendo "ceros" en la primera columna, para ello usamos la primera "ecuación"

$$\begin{cases} 2x+y-3z=-2 \\ 3x-2y+z=13 & E_2\to -3E_1+2E_2 \\ -5x-4y+2z=4 & E_3\to 5E_1+2E_3 \end{cases} \begin{cases} 2x+y-3z=-2 \\ -7y+11z=32 \\ -3y-11z=-2 \end{cases}$$

Ya hemos hecho "ceros" en la primera columna, a continuación hacemos ceros en la segunda columna, para ello usamos la segunda ecuación.

Antes cambiamos de signo la tercera ecuación.

$$\begin{cases} 2x+y-3z=-2 \\ -7y+11z=32 \\ -3y-11z=-2 & E_3\to -E_3 \end{cases} \begin{cases} 2x+y-3z=-2 \\ -7y+11z=32 \\ 3y+11z=+2 & E_3\to 3E_2+7E_1 \end{cases} \begin{cases} 2x+y-3z=-2 \\ -7y+11z=32 \\ 110z=110 \end{cases}$$

Ya los hemos transformado en un sistema de Gauss, resolvemos de abajo hacia arriba:

$$\begin{cases} 2x+y-3z=-2 \\ -7y+11z=32 \\ 110z=110 \quad \uparrow \end{cases}$$

De $E_3: 110z=110 \to z=\dfrac{110}{110}=1 \to z=1$

Sustituimos en $E_2: -7y+11z=32 \to -7y+11\cdot 1=32$

$-7y=32-11 \to -7y=21 \to y=\dfrac{21}{-7}=-3 \to y=-3$

Sustituimos en $E_3: 2x+y-3z=-2 \to 2x+(-3)-3\cdot 1=-2 \to 2x-3-3=-2 \to$

$2x-6=-2 \to 2x=6-2 \to 2x=4 \to x=\dfrac{4}{2}=2 \to x=2$

La solución del sistema es $x=2, \quad y=-3, \quad z=1 \to$ el sistema tiene una única solución → se trata de un sistema compatible determinado →S.C.D.

En las ecuaciones del sistema inicial no sobraba ninguna, ninguna es combinación lineal del resto, las ecuaciones son linealmente independientes.

78. **Resuelve los siguientes sistemas con tres incógnitas**

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ 2x-y+3z=9 \\ 6x-y-z=1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ 2x-y+2z=7 \\ 3x-2y+z=6 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ 2x-3y+8z=20 \\ 3x+y-z=2 \end{array}\right\}$$

79. **Si al número de mi piso le sumo 6, obtienes el doble del número del piso que está debajo del mío. ¿En qué piso vivo?**

80. **En una competición de atletismo hay el doble número de atletas de EE.UU. que de España. En total hay 213 atletas. ¿Cuántos participantes hay de cada uno de estos dos países?**

81. **La longitud del rectángulo es dos veces la anchura. Si el perímetro es 20 cm, halla la anchura.**

82. **El perímetro de un triángulo isósceles es 35 centímetros. Si los lados iguales miden cada uno el doble del lado desigual. ¿Cuánto mide cada lado?.**

83. **El ancho de un rectángulo es un tercio del largo. Halla el ancho sabiendo que su perímetro es 96 cm.**

84. **Andrés tiene 16 años, su hermano Paco, 14 y su padre, 40 años. ¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea la suma de las edades de los hijos?**

85. **En un almacén hay dos veces más microondas que televisores y cinco veces más lavadoras que microondas. Si en total hay 169 electrodomésticos, halla cuantos hay de cada clase.**

86. **En un circo hay 11 animales carnívoros entre tigres, leones y panteras. Se sabe que cada león come tres kilos de carne al día, que cada tigre come dos kilos al día y cada pantera también dos kilos. Si en total se necesitan 25 kilos de carne al día y se sabe que el número de panteras es el triple que el número de tigres. ¿Cuántos leones, panteras y tigres hay?.**

87. **Juan, Pedro y Luis salen un domingo por la tarde. Entre los tres tienen 24 €. Se sabe que si Pedro le da dos € a Juan ambos tendrán el mismo dinero. También se sabe que si Luis le da dos € a Pedro, entonces Pedro tendría doble dinero que Luis. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?**

88. **Los amigos de una peña van a disfrazarse con pelucas. Las pelucas son de pelo rubio, moreno o castaño. En total hay 203 pelucas. Entre las de pelo moreno y castaño hay 127 pelucas y hay 105 pelucas contando las de pelo rubio y castaño. ¿Cuántas pelucas que hay de cada tipo?**

89. **En una heladería, por un helado, dos zumos y 4 batidos nos cobraron 35 euros. Otro día, por 4 helados, 4 zumos y un batido nos cobraron 34 euros. Un tercer día por 2 helados, 3 zumos y 4 batidos 42 euros. ¿Cuál es el precio de cada uno?**

90. **En un centro hay dos equipos de futbol A y B. Si del equipo A pasan tres personas al B en amos queda el mismo número. En cambio, si del B pasan 7 al A queda en este un número que es el cuadrado de los de aquel. ¿Cuántos deportistas hay en cada equipo?**

91. **En una confitería envasan los bombones en cajas de 250 g., 500 g. y 1 kg. Cierto día envasaron 60 cajas en total, habiendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 g.) que de tamaño mediano (500 g.). Sabiendo que el precio del kilo de bombones son 24 euros y que el importe total de los bombones envasados asciende a 750 Euros, determine cuántas cajas se han envasado de cada tipo**

92. **Cuando en el año 1800 Beethoven escribió su primera sinfonía, su edad multiplicaba por diez la del por entonces niño Franz Schubert. Pasa el tiempo y cuando Schubert compone su célebre Sinfonía Incompleta, la suma de las edades de ambos músicos es igual a 77 años. Cinco años más tarde muere Beethoven, y en ese momento Schubert tiene los mismos años que tenía Beethoven cuando compuso la primera Sinfonía. Determine el año de nacimiento de cada uno de estos dos compositores.**

94. **Un profesor de tenis, en un entrenamiento, reparte tres pelotas a cada uno de sus alumnos y alumnas le sobran once pelotas. Al día siguiente lleva veinte pelotas más que el día anterior y les entrega cinco pelotas a cada uno, sobrándole sólo una.**

a) ¿Cuántos estudiantes tiene?
b) ¿Cuántas pelotas llevó el segundo día?

95. **Los pueblos de Abejar, Buitrago y Cidones no están situados en línea recta. Para ir desde Abejar a Cidones, pasando por Buitrago, se recorren 24 km. En el camino de Buitrago a Abejar, pasando por Cidones, se cubren 32 km. Si vamos de Cidones a Buitrago, pasando por Abejar, se recorren 28 km. ¿Podrías determinar la distancia que hay entre los pueblos, es decir, de Abejar a Buitrago, de Buitrago a Cidones y de Cidones a Abejar?**

96. **Un conductor parte del punto A, hacia el punto B, a las 9 de la mañana con una velocidad de 100 km/h, debiendo realizar una parada para recoger un paquete a 40 km del punto de partida. A las 10 de la mañana y habiendo omitido la parada, otro conductor sale del kilómetro 40 a una velocidad constante de 120 km/h.**

a) ¿A qué hora alcanzará el segundo al primer conductor?
b) ¿Que espacio han recorrido ambos?

97. **Pedro tiene 12 años y Ana tiene 18. ¿Cuántos años han de pasar para que las edades de ambos sumen 46 años?.**

98. **En dos depósitos hay la misma cantidad de agua. Si pasáramos 60 litros del primero al segundo habría el doble en uno que en otro. ¿Cuántos litros contiene cada depósito?.**

99. **La suma de las edades de tres hijos es igual a la edad de su madre. Si la madre tiene 48 años y cada uno de los hijos tiene 2 años más que el anterior, ¿cuáles son sus edades?**

100. **Un número de tres cifras es tal que la suma de sus cifras es 11. Si el orden de las cifras se invierte, el número que resulta es 99 unidades mayor que el número que buscamos y la cifra de las decenas es el doble que la cifra de las unidades. Halle el número.**

101. **Si al número de mi piso le sumo 6, obtienes el doble del número del piso que está debajo del mío. ¿En qué piso vivo?**

UNIDAD DIDÁCTICA 3
GEOMETRÍA PLANA

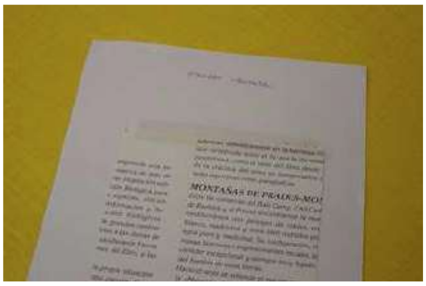
1. Las figuras geométricas en el plano

1.1. Geometría plana

La Geometría trata sobre las formas y sus propiedades. La geometría plana estudia las formas en una superficie plana.

Pero, ¿qué es un plano? Vivimos en un mundo en tres dimensiones, pues bien, si suprimiéramos una dimensión, nos quedaría un plano. Imagina que vivieras en un mundo bidimensional. Podrías moverte, viajar, girar, avanzar, retroceder…pero no podrías subir ni bajar, porque no habría nada que tuviera altura, ya que sería un mundo plano.

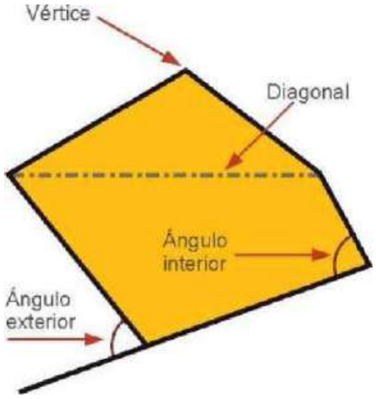
La definición más correcta de **plano** es: la parte superior de un trozo de papel, perfectamente liso y sin fin.



Una hoja es una figura plana

1.2. Descripción de figuras geométricas en el plano. Polígonos

Las figuras **planas** y **cerradas** se llaman **polígonos**. Un polígono es una figura con varios lados, todos ellos rectos. Es **regular** si todos sus lados y ángulos son iguales.

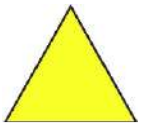
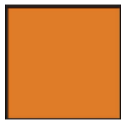
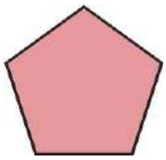
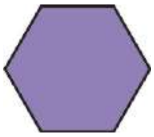
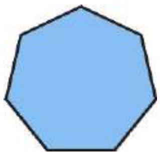
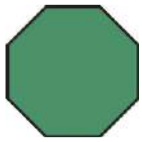


Elementos de un polígono

Polígono regular

Polígono no regular

► **Clasificación de polígonos regulares**

Nombre	**Lados**	**Ángulo interior**	**Forma**
Triángulo	3	60°	
Cuadrilátero	4	90°	
Pentágono	5	108°	
Hexágono	6	120°	
Heptágono	7	128,571°	
Octágono	8	135°	

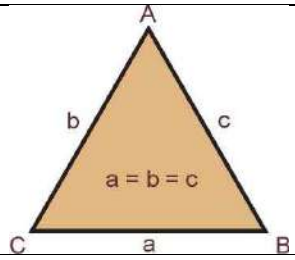
1.3. Triángulos

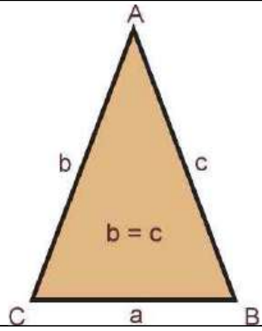
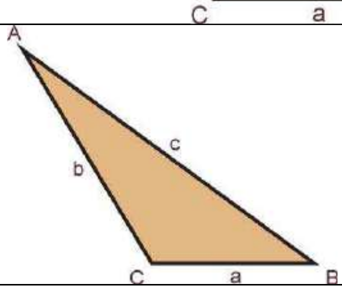
Un triángulo es un polígono con **tres lados** y **tres ángulos**. Los tres ángulos de cualquier triángulo siempre suman 180°.

Dependiendo del número de **lados o ángulos que sean iguales**, podemos destacar los triángulos equilátero, isósceles y escaleno:

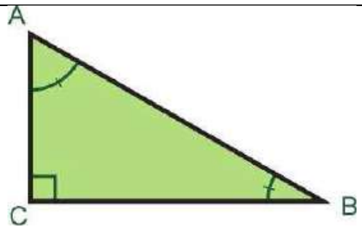
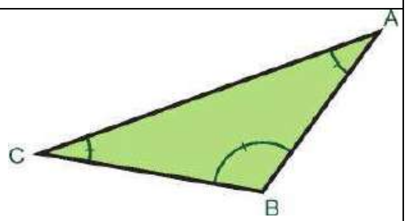
Triángulo **equilátero**.

- Tres lados iguales.
- Tres ángulos iguales de 60°.



Triángulo **isósceles**. ➢ Dos lados iguales. ➢ Dos ángulos iguales. ➢ No regular.	
Triángulo **escaleno**. ➢ Ningún lado igual. ➢ Ningún ángulo igual. ➢ No regular.	

También se clasifican los triángulos atendiendo al **valor de sus ángulos**. Los más comunes son:

Triángulo **rectángulo**. ➢ -Tiene un ángulo de 90º (ángulo recto).	
Triángulo **obtusángulo**: ➢ Tiene un ángulo mayor de 90º.	

1.4. Cuadriláteros

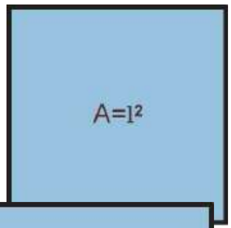
Un cuadrilátero es cualquier **figura plana de cuatro lados**.

Dentro de los cuadriláteros distinguimos: **paralelogramos** y **no paralelogramos**. Un paralelogramo es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos y de igual longitud, y los ángulos opuestos son iguales.

Paralelogramos	Cuadrado, rectángulo y rombo.
No paralelogramos	Trapecio y deltoide.

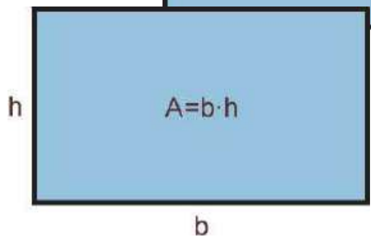
▶ Cuadrado

Es un cuadrilátero con los cuatro lados iguales. Sus cuatro ángulos son rectos (90°).



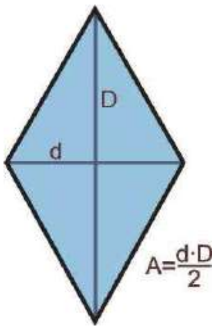
▶ Rectángulo

Es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos y de la misma longitud. Sus cuatro ángulos son rectos (90º).



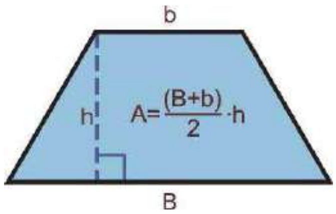
▶ Rombo

Es un cuadrilátero cuyos lados son todos iguales, siendo los lados opuestos paralelos. Sus ángulos opuestos son iguales. Además, las diagonales se cortan en ángulos rectos, es decir, son perpendiculares.



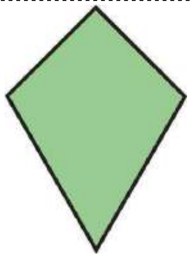
▶ Trapecio

Es un cuadrilátero con un par de lados paralelos. Pero no es un paralelogramo, porque sólo un par de lados es paralelo. Se llama trapecio regular si los lados que no son paralelos tienen la misma longitud y si los dos ángulos sobre un lado paralelo son iguales.



▶ Deltoide

Es un cuadrilátero con dos pares de lados. Cada par son dos lados adyacentes (que se tocan) de la misma longitud. Los ángulos donde se encuentran los pares son iguales. Las diagonales son perpendiculares, y una de las diagonales divide por la mitad a la otra.



1. Escribe la definición de plano.

2. Completa:

Las figuras planas y __________ se llaman __________. Un ______________ es una figura con varios lados, todos ellos rectos. Es regular si todos sus lados y _________ son iguales.

3. ¿Qué es un paralelogramo?

4. Completa este cuadro sobre los paralelogramos:

Nombre	Características	Área

2. Teorema de Pitágoras.

Recordemos que un ángulo recto es aquel que mide 90º. Un triángulo se llama **triángulo rectángulo** cuando uno de sus ángulos es recto. En estos triángulos se denomina **hipotenusa** al mayor de los tres lados; a los otros dos lados menores se les denomina **catetos**.

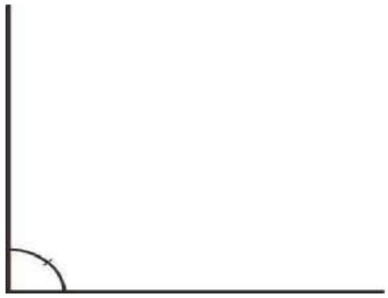


Figura 3.1: Ángulo recto

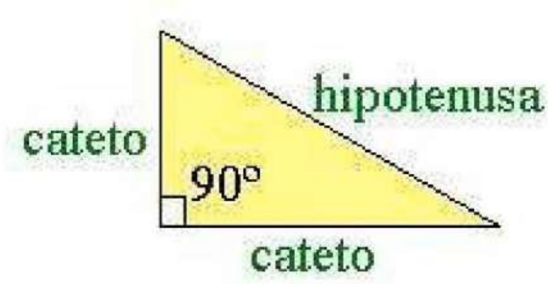
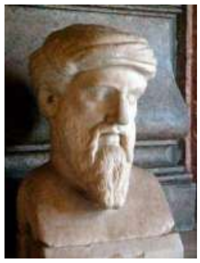


Figura 3.2: Triángulo rectángulo

En estos triángulos se cumple la siguiente propiedad: "El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los catetos al cuadrado". Si llamamos a la longitud de la hipotenusa h, a la de un cateto c_1 y a la de otro c_2, se cumple: $\boxed{h^2 = c_1{}^2 + c_2{}^2}$



Ese enunciado se conoce con el nombre de **Teorema de Pitágoras**. Fue descubierto posiblemente por un discípulo de un filósofo y matemático griego del siglo VI antes de Cristo llamado Pitágoras.

Ejemplo de aplicación:

Si un triángulo rectángulo tiene de hipotenusa 26 cm y uno de los catetos 10 cm ¿Cuánto mide el otro cateto?

Escribimos la expresión del teorema de Pitágoras: $h^2 = c_1^2 + c_2^2$

Sustituyendo h =26 ; c_1= 10 y al otro cateto c_2 = x nos queda:

$26^2 = 10^2 + x^2$ operamos y despejamos de la ecuación la incógnita

$676 = 100 + x^2$ --> $676-100 = x^2$ --> $576 = x^2$ --> x = raiz cuadrada (576)

Al realizar la raíz cuadrada resulta x= 24 luego el segundo cateto vale 24 cm.

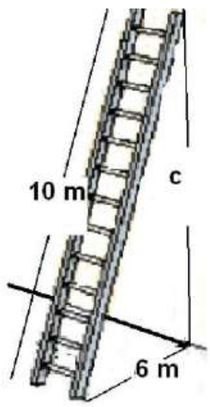
El teorema nos permite resolver muchos problemas de aplicación práctica.

Ejemplo:

Una escalera de 10 metros de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera dista 6 metros de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?

Aplicando el Teorema de Pitágoras: $h^2 = c^2 + c^2$; sustituyendo para este caso: $10^2 = 6^2 + c^2$ --> $100 = 36 + c^2$ despejamos c:

Luego: $c^2 = 100-36 = 64$ haciendo la raiz de 64 --> c = 8 metros.



Ejemplo de aplicación del Teorema de Pitágoras

5. Completa los datos que faltan en la tabla aplicando el teorema de Pitágoras:

hipotenusa	cateto	cateto
10 cm	8 cm	
50 cm		30 cm
45 cm	27 cm	
	12 cm	9 cm
20 cm		12 cm
25 cm	20 cm	
	28 cm	21 cm

6. **El lado de un triángulo equilátero vale 10 cm. ¿Cuánto vale la altura?**

7. **Calcula la diagonal de un cuadrado de lado 20 cm**

8. **Un jardín en forma de trapecio isósceles tiene dos lados paralelos de 80 y 140 m y los otros dos son de 50 m de longitud. Halla su área.**

9. **Un cable de 2,5 m de longitud une el extremo superior de una antena de televisión con un punto situado en el suelo a 1,5 m de su base. ¿Cuál es la altura de la antena?**

3. Cálculo de perímetros y áreas

El **perímetro** de una figura geométrica es la longitud de su contorno. El **área** de una figura geométrica plana indica su extensión o la superficie que encierra dicha figura.

Para calcular el perímetro de una figura geométrica hay que conocer cómo es esta, medir los lados que la conforman y sumarlos. Si la figura es un polígono regular, este proceso es mucho más cómodo.

Ejemplo:

Calcula el perímetro de un cuadrado de lado 20 metros.

Como todos los lados del cuadrado son iguales y este tiene cuatro lados el perímetro será 4 por 20, es decir, 80 metros.

Medir el área de una superficie supone calcular **el número de veces** que contiene la unidad de superficie.

El **área de un triángulo** viene dada por la expresión $\boxed{\mathbf{A} = \dfrac{\mathbf{Base} \times \mathbf{altura}}{\mathbf{2}}}$

El **área de un rombo** vendría dada a partir del producto de las diagonales

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mathbf{Diagonal} \times \mathbf{diagonal}}{\mathbf{2}}}$$

El **área de un paralelogramo** en general viene dada por $\boxed{A = base \times altura}$

Para muchas figuras complejas puede calcularse su área descomponiéndola en paralelogramos más sencillos.

El área de un **polígono regular**, en general, viene dada por

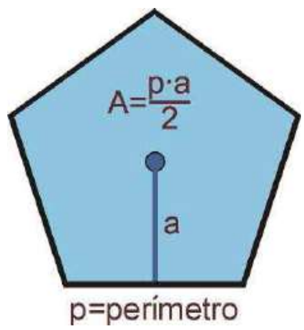
$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\textbf{perímetro x apotema}}{\mathbf{2}}}$$

Ejemplo:

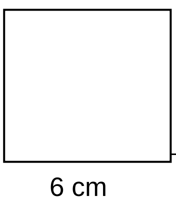
Calcula el área de un pentágono de perímetro 50 y apotema 5 cm.

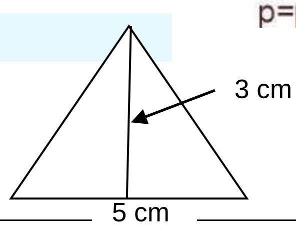
Aplicando la expresión general tenemos

$$A = \frac{perímetro\ x\ apotema}{2} = \frac{20\ x\ 5}{2} = 50\ cm$$



10. **Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras:**





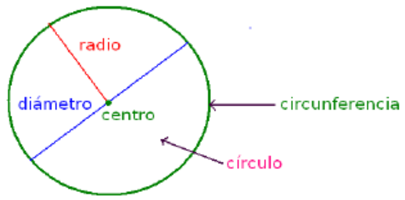
4. El círculo y la circunferencia

Una **circunferencia** es la línea curva cerrada que bordea a un círculo.

Podemos decir que un **círculo** es un “polígono regular de infinitos lados” y ese concepto es el que se utilizó en un principio para tratar de calcular la longitud de una circunferencia o el perímetro del círculo.

Cuántos más lados tenga el polígono más se parecerá la longitud de la circunferencia al perímetro del polígono y también más se parecerá el área del círculo al área del polígono; pero eso ya lo usaremos más adelante para investigar otras cosas que te van a resultar interesantes.

La **circunferencia** es la línea curva que rodea al círculo y está formada por los puntos que están a igual distancia de un punto fijo llamado centro. El círculo es la parte interior a la circunferencia.



El **radio** es la longitud de cada segmento que une el centro del círculo con la circunferencia. El diámetro es el segmento más largo que une dos puntos de la circunferencia. Divide la circunferencia en dos partes iguales.

4.1. Longitud de la circunferencia

La circunferencia es una curva cerrada y su longitud se calcula con la siguiente fórmula:

Longitud de la circunferencia = $2 \cdot \pi \cdot r$

Donde **π** es aproximadamente el número 3,14 y *r* es el radio.

Ejemplo:

La longitud de una circunferencia de radio 5 metros es aproximadamente $\boldsymbol{2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4 metros}$

4.2. Área del círculo

Un círculo es una superficie plana, y su área que se calcula con la fórmula:

Área del círculo= $\pi \cdot r^2$

Ejemplo:

El área de un círculo de radio 5 metros es aproximadamente A = $3{,}14 \cdot 5^2 = 3{,}14 \cdot 25 = 78{,}5 m^2$

11. Calcula la longitud de la circunferencia si su diámetro vale:

a) 20 cm
b) 30 cm
c) 45 cm
d) 60 cm

12. Calcula la longitud de la circunferencia si su radio vale:

a) 10 m
b) 5 m
c) 7 m
d) 9 m

13. La longitud de una circunferencia es 628 metros. ¿Cuánto mide su diámetro?

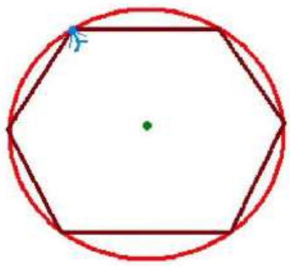
14. **Calcula cuánto mide el radio de las circunferencias cuya longitud es:**

a) 314 cm
b) 2.198 cm
c) 3.768 cm
d) 1.256 cm

15. **Calcula el área de los círculos cuyos radios miden:**

a) 10 cm
b) 5 cm
c) 7 cm
d) 6 cm

16. **En la carpa de un circo se van a colocar asientos según se muestra en la figura (solo está representada la última fila de asientos). El perímetro de la carpa circular es de 300 metros. ¿A qué distancia estará la persona que esté sentada en la parte más alejada del centro de la pista?**



17. **En un barrio se va construir un parque infantil con forma circular. Para rellenarlo de arena se necesitan 50 kilos de tierra por cada metro cuadrado de superficie. Si el parque tiene un diámetro de 20 metros. ¿Cuánta arena hará falta?**

5. Cuerpos geométricos. Poliedros

Los **cuerpos geométricos** son regiones cerradas del espacio. Vamos a enumerar y diferenciar los distintos **cuerpos geométricos** que vas a estudiar, veremos la forma de construirlos o su desarrollo y aprenderás a calcular el área y el volumen de cada uno de ellos.

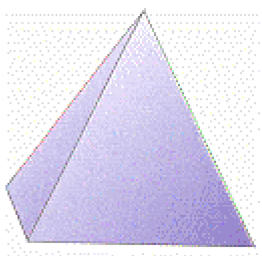
5.1. Poliedros. Elementos de un poliedro

El **poliedro** es un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos. Se llaman **poliedros regulares** cuando sus caras son polígonos regulares.

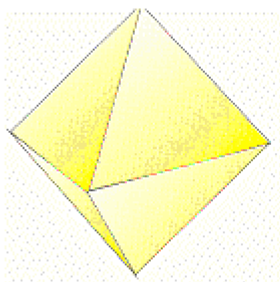
Los elementos principales de un poliedro son las caras, los vértices y las aristas:

- - **Caras:** polígonos que delimitan el poliedro.
- - **Aristas**: bordes de las caras.
- - **Vértices:** puntos donde se encuentran tres o más aristas.

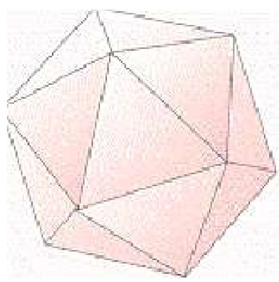
Sólo hay cinco **poliedros regulares**: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Con triángulos equiláteros construimos 3 clases de poliedros regulares:



TETRAEDRO
4 caras

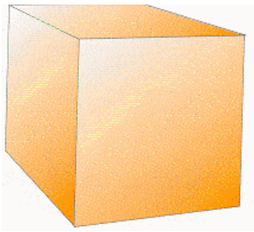


OCTAEDRO
8 caras



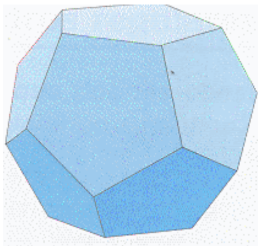
ICOSAEDRO
20 caras

… con cuadrados construimos solo uno:



CUBO O HEXAEDRO
6 caras

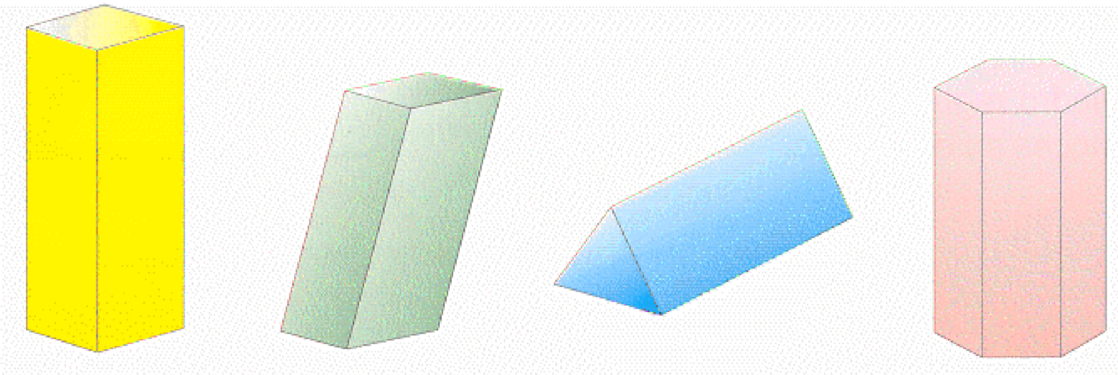
... con pentágonos regulares se puede hacer otro:



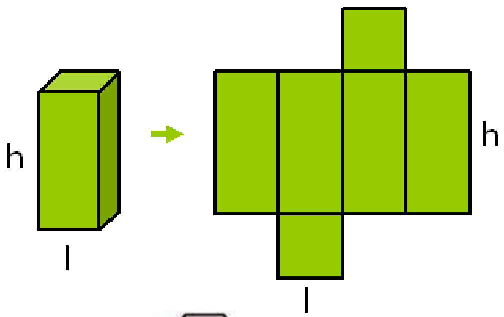
DODECAEDRO
12 caras

5.2. Los prismas.

Los prismas son poliedros que tienen por bases dos polígonos iguales y por caras laterales, paralelogramos. En particular, los prismas cuyas caras son todos paralelogramos (polígono de cuatro lados paralelos dos a dos) se llaman **paralelepípedos**.



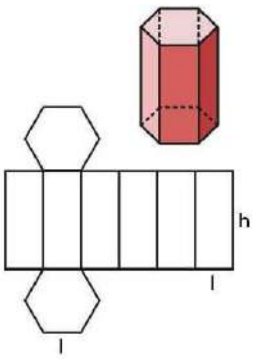
Área de la superficie de un prisma: es la suma del área lateral más el área de las dos bases.



Área de la base = l^2

Área lateral = $4 \cdot l \cdot h$

Área total = $2 \cdot l^2 + 4 \cdot l \cdot h$



Área lateral = $6 \cdot l \cdot h$

Área total = área lateral + 2 · área de la base

Área total = $6 \cdot l \cdot h + 2 \cdot$ área del hexágono

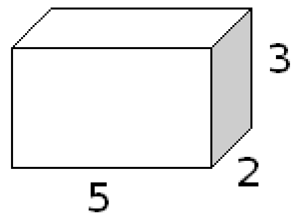
Donde: Área hexágono = $\frac{perímetro \; x \; apotema}{2}$

Volumen de un prisma: se calcula multiplicando el área de la base por la altura.

Volumen prisma = área base · altura

Ejemplo:

Vamos a calcular el área y el volumen del prisma de la figura. El área es la suma de las áreas de las caras. Como son seis rectángulos, sólo tienes que sumar el área de cada uno de ellos.



Área de la base = 5 ·2 = 10

Área de la cara anterior = 5 · 3 =15.

Área de la cara lateral = 2 · 3 = 6.

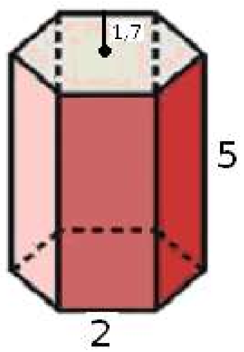
Luego, **Área** = 10 · 2 + 15 · 2 + 6 ·2 = 20 + 30 + 12 = 62.

Volumen del prisma: es el área de la base por la altura.

$\boxed{V = a \cdot b \cdot c} = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30.$

Ejemplo

Calcula el área y el volumen de un depósito con forma de prisma hexagonal cuya altura mide 5 metros, el lado del hexágono de la base 2 metros y la apotema mide 1,7 metros.



El perímetro de la base es 6 ·2 = 12 m

Área hexágono = $\frac{perímetro\ x\ apotema}{2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 1{,}7}{2}$ =10,2 m²

Como son dos bases: Áreas bases = 2 · 10,2 = 20,4 m²

El área de una de las caras laterales es 2 · 5 = 10 m²

Como son 6 caras laterales: Área lateral = 6 · 10 = 60

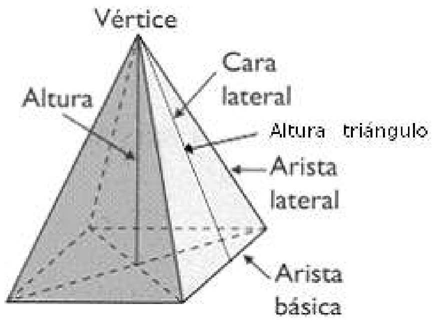
m² Luego **el área total** = 20,4 + 60 = **80,4 m²**

El **volumen** es el área de la base por la altura:

Volumen = 10,2 · 5 = **51 m³**

5.3. Las pirámides

Son poliedros que tienen por base un polígono cualquiera y sus caras laterales son triángulos que concurren en un vértice común.



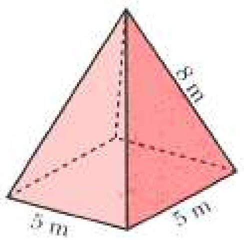
Pirámide cuadrangular: base cuatro lados

Área de la superficie: es la suma del área de la base y el área de las caras laterales.

Volumen: es la tercera parte del volumen de un prisma con la misma base e igual altura.

Es decir, $\boxed{\text{Volumen pirámide} = \frac{A_{base} \cdot Altura\ pirámide}{3}}$

Ejemplo



Calcula el área de la pirámide de la figura, sabiendo que su altura es de unos 7,2 metros.

Área base = 5 · 5 = 25 m²

La altura de cada triángulo la calculamos con el teorema de Pitágoras: partimos el triángulo por la mitad para obtener uno rectángulo de hipotenusa 8 m y uno de los catetos 2,5 m.

$8^2 = (2{,}5)^2 + h^2$ $64 = 6{,}25 + h^2$ $64\text{-}6{,}25 = h^2$ --> $57{,}75=h^2$

Luego h $=\sqrt{57{,}75} = 7{,}6$ m

Área triángulo $= \dfrac{base \cdot altura}{2} = \dfrac{5 \cdot 7{,}6}{2} = 19$ m^2

Área total = 25 + 4 · 19 = 25 + 76 = 101 m^2

La altura de la pirámide es de 7,2 metros, luego:

Volumen $= \dfrac{A_{base} \cdot Altura\ pirámide}{3} = \dfrac{25 \cdot 7{,}2}{3} = \dfrac{190}{23} = 60$ m^3

Observación: no debes confundir la altura del triángulo de las caras con la altura de la pirámide.

5.4. Cuerpos redondos: cilindro, cono y esfera

Los **cuerpos redondos** se forman al girar una figura alrededor de una recta llamada eje. Los más sencillos son el cilindro, el cono y la esfera.

► Cilindro

Es un cuerpo geométrico engendrado por el giro de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

Área de un cilindro: es la suma del área de las dos bases y el área lateral.

Las bases son círculos, cuya área es $\boldsymbol{A = \pi r^2}$

La parte lateral, si la cortas y la estiras, es un rectángulo, de base la longitud de la circunferencia y de altura h. Luego:

Área lateral: 2 · π · r · h

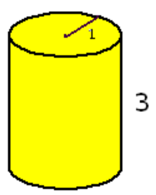
Área base = π · r ^{2}

Área total =2 · π · r · h + 2 π · r ^{2}

Volumen cilindro = área base · altura = π · r ^{2} h

Ejemplo:

Vamos a calcular el área y el volumen de un cilindro de 3 metros de altura y 1 metro el radio de la base:



Área lateral: 2 · π · r · h = 2 · π · 1,3 = 18,84 m^2

Área base = π · r ^{2} = π · 1^2 = π·1 = 3, 14 m^2

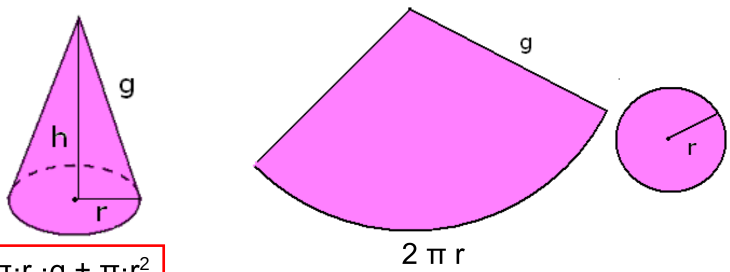
Área total =2 · π · r · h + 2 π · r ^{2} =18,84 + 3,14 = 21,98 m^2

Volumen cilindro = área base · altura = π · r ^{2} · h = 3, 14 ·1^2· 3 = 9,42 m^3

► Cono

Es un cuerpo geométrico engendrado por el giro de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Al segmento que une el vértice con un punto cualquiera de la circunferencia base se le llama **generatriz (g)**. El triángulo que genera el cono tiene por catetos r y h, y por hipotenusa g.

El área lateral = **π ·r ·g**

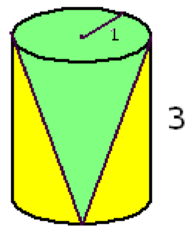


El área de la base es el del círculo de radio r: **π·r ^{2}**

Área cono = Área lateral + área base = π·r ·g + π·r^2

Volumen: es la tercera parte de la que tiene el cilindro con la misma altura y la misma base; es decir

$$\text{Volumen} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

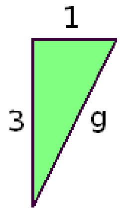


Ejemplo:

Calcula el área y el volumen del cono contenido dentro del cilindro de la figura.

En el ejemplo anterior hallamos el área y el volumen del cilindro.

La generatriz la hallamos aplicando el teorema de Pitágoras.



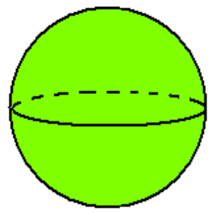
$g^2 = 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$ Luego $g = \sqrt{10} = 3{,}16$ m

Area cono =Area lateral + area base = $\pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$ =
$3{,}14 \cdot 1 \cdot 3{,}16 + 3{,}14 \cdot 1^2 = 9{,}92 + 3{,}14 = 13{,}06$ m ^{2}

El volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro, por tanto:

Volumen = 9,42/ 3 = 3, 14 m^3

► Esfera



Es un cuerpo de revolución engendrado por un semicírculo que gira sobre su diámetro.

El área de la superficie de una esfera es cuatro veces el de su círculo máximo.

$$\text{Área esfera} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

El volumen de una esfera es las dos terceras partes del volumen de un cilindro.

$$\textbf{Volumen esfera} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

Ejemplo:

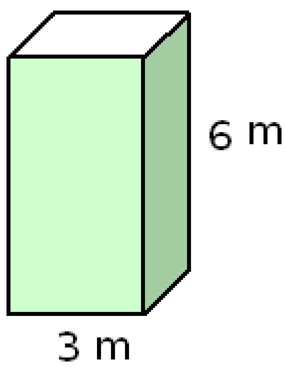
Vamos a calcular cuánto cuero se necesita para fabricar un balón de 16 cm de radio. Expresaremos el resultado en decímetros.

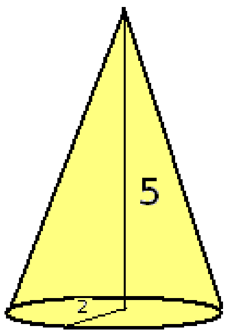
Área balón = $4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 162 = 12{,}56 \cdot 256 = 3215{,}36 cm^2 = 32{,}15 dm^2$

Calculemos también cuánta capacidad tiene en litros:

Volumen esfera = $\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 16^3}{3} = \frac{51.445{,}76}{3}$ = 17.148,59 cm^3 = 17,15 dm^3 = 17,15 litros

18. **Halla el área y el volumen del prisma cuadrangular sin tapa de la figura:**





19. **Halla el área lateral del cono de la figura:**

20. **Halla el área lateral de una pirámide cuadrangular, sabiendo que su arista mide 2 dm y el lado de la base también mide 2 dm.**

21. **Calcula cuántos litros de agua caben en un depósito esférico de 10 metros de radio.**

22. **Halla el área y el volumen (en litros) de un depósito con forma de prisma pentagonal de 5 metros de altura. El lado de la base mide 2 y la apotema 1,4.**

6. Trigonometría

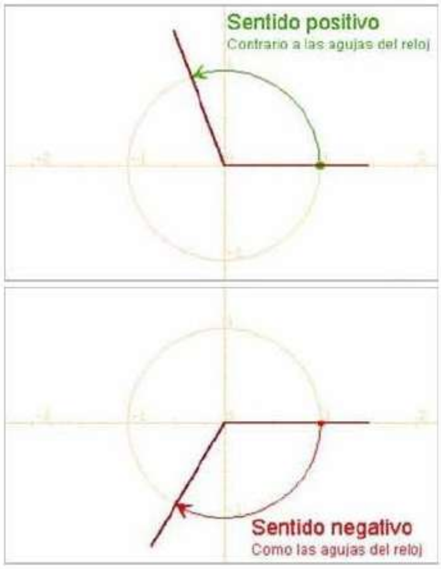
6.1 Medida de ángulos

Trigonometría es una palabra que deriva del griego Τριγωνομετρία, Tri (Τρι) tres, gono (γωνο) ángulo, metría (μετρία) medida, es decir, "medida de tres ángulos". Puedes consultar la definición de trigonometría que da el diccionario de la R.A.E.

En este curso se tratará únicamente la trigonometría plana.

Con objeto de estudiar los ángulos y su medida consideraremos que un ángulo es un recorrido en la circunferencia con centro el origen y de radio unidad o circunferencia goniométrica, el punto de partida de estos recorridos se situará en el punto de coordenadas (1,0) y la medida de un ángulo será la medida de ese recorrido.

Los ángulos pueden tener sentido positivo o negativo según sea el de su recorrido; si es contrario al de las agujas del reloj será positivo y si es igual, negativo.



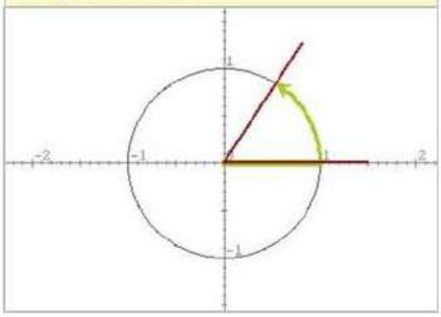
Radianes

Medir un ángulo es medir su recorrido en la circunferencia.

Como la medida de toda la circunferencia es 2·π·radio, resulta conveniente tomar como unidad de medida el radio.

En las figuras, los ángulos se representan en una circunferencia de radio 1, ello no significa que el radio mida 1 cm o 1 pie o 1 m, sino que el radio es la unidad de medida tomada. Por razones evidentes a esta unidad se le llama **radián**.

El ángulo de 1 radián es aquel cuyo recorrido en la circunferencia es igual al radio.



Grados sexagesimales

Ya conoces el sistema sexagesimal de medida de ángulos.

Al dividir la circunferencia en 360 partes iguales, obtenemos un grado, a su vez cada grado se compone de 60 minutos y cada minuto de 60 segundos.

Así un ángulo se mide en:

grados° minutos' segundos''

De grados a radianes y de radianes a grados

1 grado = $\frac{\pi}{180}$ **radianes**

De grados a radianes:

✓ multiplicamos por $\frac{\pi}{180}$

1 radián = $\frac{180}{\pi}$ **grados**

De radianes a grados:

✓ multiplicamos por $\frac{180}{\pi}$

El semiperímetro de la semicircunferencia es π·radio

π radianes = 180 grados

es decir, π veces un radián = 180 veces un grado

$\pi \cdot 1$ radián = $180 \cdot 1$ grado

Si despejamos el grado resulta:

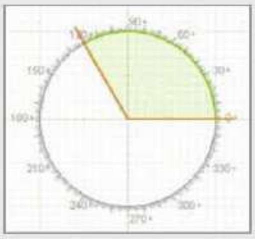
1 grado = $\pi/180$ radianes ~ 0.0175 radianes

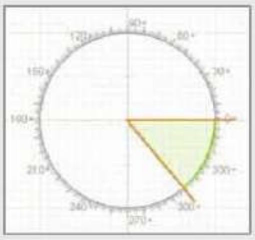
Si despejamos el radián resulta:

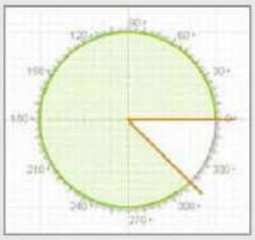
1 radián = $180/\pi$ grados ~ 57.2957 grados

EJERCICIOS resueltos

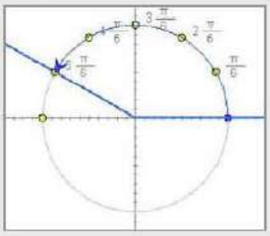
1. Dibuja en la circunferencia goniométrica los ángulos de 120º, -50º y 315º.

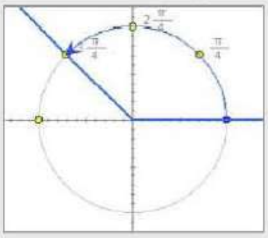


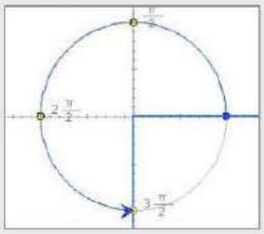




2. Dibuja en la circunferencia goniométrica el ángulo de $5\pi/6$, $3\pi/4$, y $3\pi/2$ rad.







3. Pasa a radianes: a) 150º, b) 210º, c) 270º, d) 60º

a) $150^\circ = \frac{150 \cdot \pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$ rad

b) $210^\circ = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$ rad

c) $270^\circ = \frac{270 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{2}$ rad

d) $60^\circ = \frac{60 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ rad

4. Pasa a grados: a) $11\pi/6$ rad, b) $\pi/4$ rad, c) $5\pi/4$ rad, d) $2\pi/3$ rad

a) $\frac{11\pi}{6}$ rad $= \frac{11\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 330^\circ$

b) $\frac{\pi}{4}$ rad $= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 45^\circ$

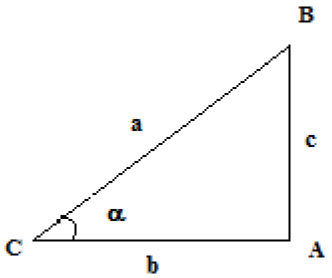
c) $\frac{5\pi}{4}$ rad $= \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 225^\circ$

d) $\frac{2\pi}{3}$ rad $= \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 120^\circ$

6.2. Razones trigonométricas de un ángulo.

En un triángulo rectángulo para cada ángulo agudo se pueden establecer las relaciones entre los lados y se les llama **razones trigonométricas**. Estas razones son iguales en todos los triángulos rectángulos semejantes, independientemente del valor de los lados.

Las razones trigonométricas de un ángulo agudo C se llaman **seno**, **coseno y tangente,** y su expresión es:



$$\boxed{sen\alpha = \frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa}} \quad sen\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{cateto\ \ contiguo}{hipotenusa}} \quad \cos\alpha = \frac{b}{a}$$

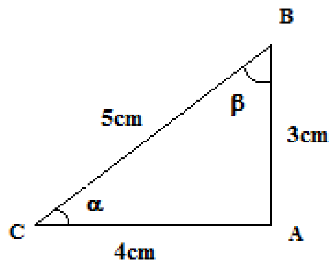
$$\boxed{tg\alpha = \frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ \ contiguo}} \quad tg\alpha = \frac{c}{b}$$

Se observa que el seno y el coseno de un ángulo agudo son siempre menores de 1; esto es porque la hipotenusa es mayor que los catetos y la tangente puede ser mayor o menor de 1

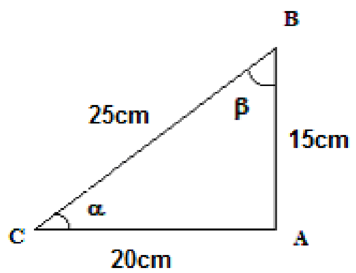
Ejemplo . Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de este triángulo rectángulo.

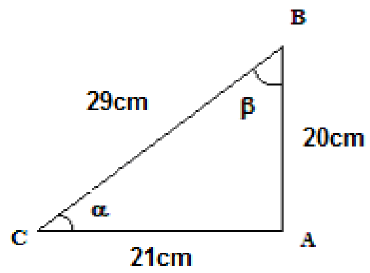
$sen\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$ $\quad \cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$ $\quad tg\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$sen\beta = \frac{4}{5} = 0{,}8$ $\quad \cos\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$ $\quad tg\alpha = \frac{4}{3} = 1{,}33$

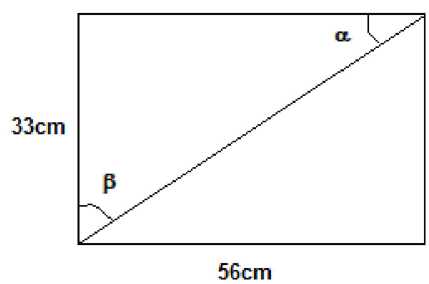


23. **Calcula las razones trigonométricas de los ángulos α y β.**





24. **Halla las razones trigonométricas.**



A) Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de triángulos y problemas geométricos diversos

A.1- Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo

Primera relación fundamental $\boxed{sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$

Segunda relación fundamental $\boxed{tg\alpha=\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}}$

Ejemplo: Utiliza las relaciones entre las razones trigonométricas para calcular el coseno y la tangente de α, si senα=0,5

$$sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad (\frac{1}{2})^2+\cos^2\alpha=1 \quad \frac{1}{4}+\cos^2\alpha=1 \quad \cos^2\alpha=1-\frac{1}{4}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{3}{4} \quad \cos^2\alpha=\frac{3}{4} \quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\alpha=\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \quad tg\alpha=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad tg\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

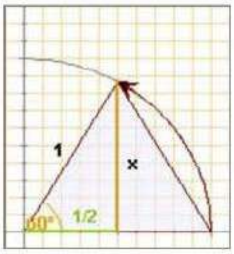
25. **Calcula el resto de razones trigonométricas utilizando las relaciones entre ellas.**

a) senα=0,3
b)senβ=0
c)cosγ=0,4
d)tgθ= 2

Razones de 30º, 45º y 60º

En un triángulo equilátero los ángulos miden **60º** Con el Teorema de Pitágoras se calcula la altura

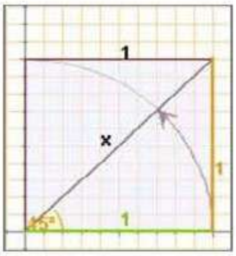
$$x = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Tomamos un cuadrado de lado **1**

Con el Teorema de Pitágoras se calcula la diagonal

$$diag = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



Los ángulos de 30º, 45º y 60º aparecen con bastante frecuencia, fíjate cómo se calculan sus razones a partir de la definición si buscamos los triángulos adecuados.

	sen	cos	tg
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Memorizar esta tabla es fácil si observas el orden que guardan. Una vez aprendidos los senos con las raíces consecutivas, los cosenos salen en orden inverso.

Con la calculadora

- Dado un ángulo α obtener sus razones trigonométricas.

  Por ejemplo el sen 28º 30´

  Pon la calculadora en modo DEG

  Teclea 28 º ' " 30 º ' " sin

  Obtenemos: 0,477158760

  En algunas calculadoras hay que pulsar la tecla sin antes de introducir el ángulo, comprueba cómo funciona la tuya.

  Si queremos obtener el cosα ó la tgα procederemos de la misma forma pero pulsando las teclas cos y tan respectivamente.

- Dada una razón obtener el ángulo α correspondiente.

  Con el mismo valor que tienes en la pantalla : 0,477158760

  Comprueba que la calculadora sigue en modo DEG

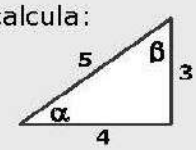
  Teclea SHIFT sin

  Obtenemos : 28,5 en grados, si queremos grados, minutos y segundos, pulsamos SHIFT º ' " obteniendo 28º 30"

EJERCICIOS resueltos

5. En el triángulo de la figura calcula:

a) sen α d) sen β
b) cos α e) cos β
c) tg α f) tg β



a) $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$ d) $\text{sen}\,\beta = \frac{4}{5} = 0{,}8$

b) $\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$ e) $\cos\beta = \frac{3}{5} = 0{,}6$

c) $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$ f) $\text{tg}\,\beta = \frac{4}{3} = 1{,}\hat{3}$

6. Obtén con la calculadora:

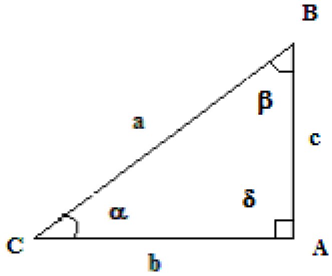
a) sen 30º = 0,5
b) cos 60º = 0,5
c) tg 45º = 1

7. Obtén con la calculadora los ángulos α y β del ejercicio 5.

α: Tecleamos 0 . 6 SHIFT sin → 36,87º
β: Tecleamos 0 . 8 SHIFT sin → 53,13º
Observa que en efecto suman 90º.

A.2- Relaciones entre los datos y las incógnitas.

Para hallar elementos desconocidos de un triángulo rectángulo se utilizan las siguientes relaciones entre datos e incógnitas:



- **El teorema de Pitágoras**:

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

- **La suma de los ángulos de un triángulo**:

$\boxed{\alpha+\beta+\delta=180º}$

- **Las razones trigonométricas**

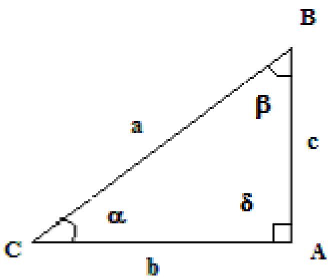
$$sen\alpha = \frac{cateto \;\; opuesto}{hipotenusa} \qquad \cos\alpha = \frac{cateto \;\; contiguo}{hipotenusa} \qquad tg\alpha = \frac{cateto \;\; opuesto}{cateto \;\; contiguo}$$

A.3- Resolución de triángulos rectángulos: datos e incógnitas.

Todos los triángulos tienen seis elementos: tres lados y tres ángulos.

Resolver un triángulo es hallar las medidas de los elementos desconocidos, que se llaman incógnitas, cuando se tiene como datos las medidas de, al menos tres elementos que lo determinan.

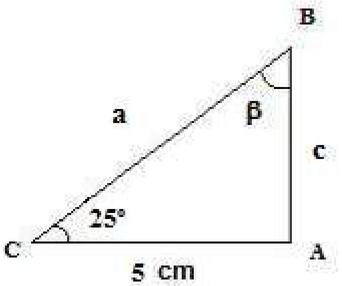
En un triángulo rectángulo se sabe que uno de los ángulos es de 90º. Para resolverlo necesitamos dos datos más.



$\delta=90º$

Ejemplo I Se conoce el ángulo recto, otro ángulo agudo y la medida de un lado.

Datos



Solución

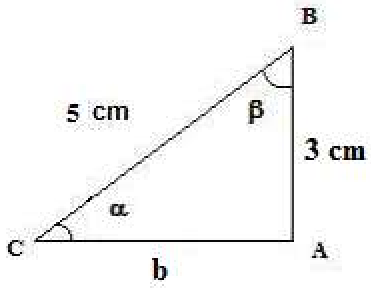
$90º+25º+\beta=180 \Rightarrow \beta=65º$

$\cos 25º = \frac{5}{a} \Rightarrow a = \frac{5}{\cos 25} \Rightarrow a = 5{,}52cm$

$tag25º = \frac{c}{5} \Rightarrow c = tag25º \cdot 5 \Rightarrow c = 2{,}33cm$

Ejemplo II Se conoce el ángulo recto y la medida de dos lados

Datos



Solución

$$5^2 = 3^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 9 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \sqrt{16} \Rightarrow b = 4$$

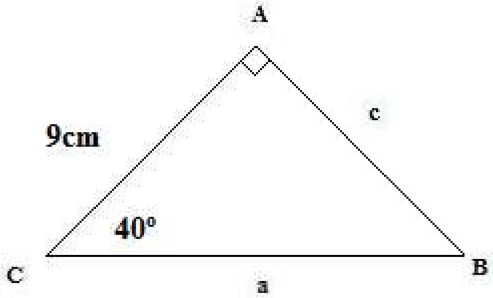
$$sen\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6 \Rightarrow \alpha = 36{,}87^{o}$$

$90^o + \beta + 36{,}87^o = 180$ $\beta = 53{,}23^o$

26. **Los lados del triángulo ABC miden 5, 12 y 13cm, respectivamente,**

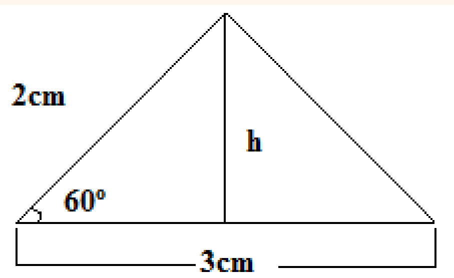
a) ¿Es ABC un triángulo rectángulo?
b) Halla las medidas de sus ángulos.

27. **Resuelve el triángulo de la figura**



A.4.Cálculo de áreas de algunas figuras geométricas.

Ejemplo I



Calculamos la altura con el sen de 60º

$$sen60 = \frac{h}{2} \Rightarrow h = 2 \cdot sen60 = \sqrt{3}cm$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad A = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} cm^2$$

A.5. Cálculo de distancias a puntos inaccesibles.

Mediante la obtención de longitudes y amplitudes de ángulos fáciles de medir y mediante la aplicación de las fórmulas de trigonometría, se calculan otras dimensiones de terreno más difíciles de hallar.

28. **Desde un punto situado a 8m del pie de un árbol se ve la copa con un ángulo de elevación de 28º. ¿Cuál es la altura del árbol?**

29. **Desde un acantilado de 9 metros de altura se ve un barco con un ángulo de depresión de 40º. ¿A qué distancia se encuentra el barco de la costa?**

30. Resuelve estos ejercicios:

1. Expresa en radianes:

a) 15º b) 120º

c) 240º d) 345º

2. Expresa en grados:

a) $\frac{\pi}{15}$ b) $\frac{3\pi}{10}$

c) $\frac{7\pi}{12}$ d) $\frac{11\pi}{6}$

3. Halla con la calculadora las siguientes razones redondeando a centésimas:

a) sen 25º b) cos 67º

c) tg 225º d) tg 150º

4. Un ángulo de un triángulo rectángulo mide 47º y el cateto opuesto 8 cm, halla la hipotenusa.

5. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 cm y un ángulo 66º. Calcula los catetos.

6. Un ángulo de un triángulo rectángulo mide 44º y el cateto adyacente 16 cm, calcula el otro cateto.

7. En un triángulo rectángulo los catetos miden 15 y 8 cm, halla los ángulos agudos.

8. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 45 cm y un cateto 27 cm, calcula los ángulos agudos.

9. En un triángulo isósceles los ángulos iguales miden 78º y la altura 28 cm, halla el lado desigual.

10. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 41 cm y los ángulos iguales 72º, calcula el otro lado.

11. El cos de un ángulo del primer cuadrante es 3/4, calcula el seno del ángulo.

12. La tangente de un ángulo del primer cuadrante es 12/5 calcula el seno.

13. El sen α = 3/5 y α es un ángulo del segundo cuadrante, calcula la tg α.

14. El cos α = 3/5 y α es un ángulo del cuarto cuadrante, calcula la tg α.

15. La tg α = 3 y α es un ángulo del tercer cuadrante, calcula el cos α.

16. La apotema de un polígono regular de 9 lados mide 15 cm, calcula el lado.

17. El lado de un exágono regular mide 30 cm, calcula la apotema.

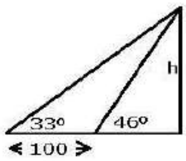
18. La apotema de un octógono regular mide 8 cm, calcula el área del polígono.

19. La longitud del radio de un pentágono regular es 15 cm. Calcula el área.

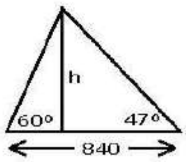
20. La sombra de un árbol cuando los rayos del sol forman con la horizontal un ángulo de 36º, mide 11m. ¿Cuál es la altura del árbol?.

21. El hilo de una cometa mide 50 m de largo y forma con la horizontal un ángulo de 37º, ¿a qué altura vuela la cometa?.

22. Para medir la altura de un edificio se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes 100m. ¿cuál es la altura si los ángulos son 33º y 46º?.



23. Dos personas distantes entre sí 840 m, ven simultáneamente un avión con ángulos de elevación respectivos de 60º y 47º, ¿a qué altura vuela el avión?.



24. Para medir la altura de una montaña se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes 480m y situados a 1200 m sobre el nivel del mar. ¿Cuál es la altura si los ángulos son 45º y 76º?.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{4\pi}{3}$ d) $\frac{23\pi}{12}$

2. a) 12º b) 54º c) 105º d) 330º

3. a) 0,42 b) 0,39 c) 1 d) -0,58

4. 10,93 cm

5. 23,75 cm, 10,57 cm

6. 15,45 cm

7. 28º 4′ 20″ 61º 55′ 40″

8. 36º 52′ 11″ 53º 7′ 49″

9. 11,9 cm

10. 25,33 cm

11. $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$

12. sen α =12/13

13. tg α =-3/4

14. tg α =-4/3

15. $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

16. 10,91 cm

17. 25,98 cm

18. lado=6,63 cm área=212,08 cm^2

19. lado=17,63 cm apot=12,14 cm
área=534,97 cm^2

20. 7,99 m

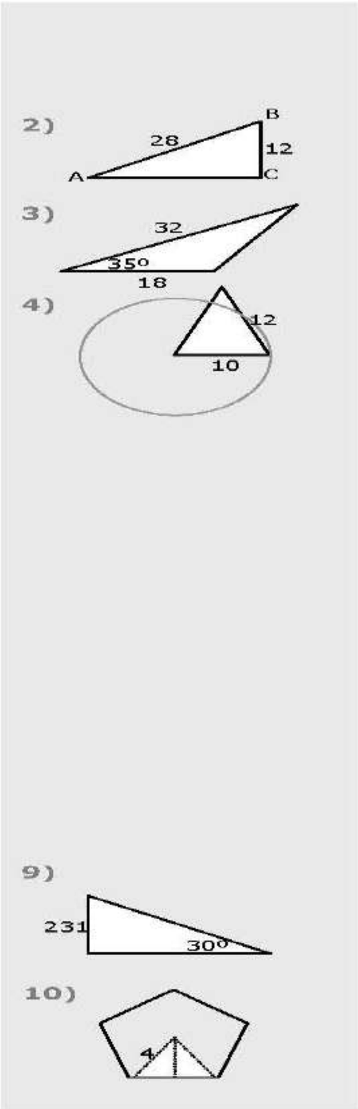
21. 30 m

22. 57,41 m

23. 638,11 m

24. 639,42+1200=1839,42 m

31. **Resuelve en tu cuaderno:**



1. Expresa en radianes el ángulo de 150º.

2. Calcula el valor de tg A en el triángulo ABC de la figura.

3. Calcula el área del triángulo de la figura.

4. Con un compás de 12 cm de longitud hemos trazado una circunferencia de 10 cm de radio, ¿qué ángulo, en radianes, forman las ramas del compás?

5. Si $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$, y α es un ángulo agudo, calcula la tg α.

6. Si tg α=1.25 y α está en el tercer cuadrante, calcula el cos α.

7. A partir de las razones del ángulo de 30º, calcula la $\text{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

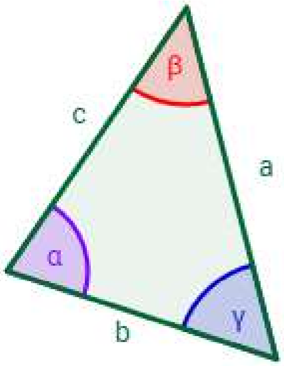
8. Si $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, y α es un ángulo agudo, calcula el cos(180º- α).

9. La altura de Torre España es de 231 m, ¿cuánto mide su sombra cuando la inclinación de los rayos del sol es de 30º?

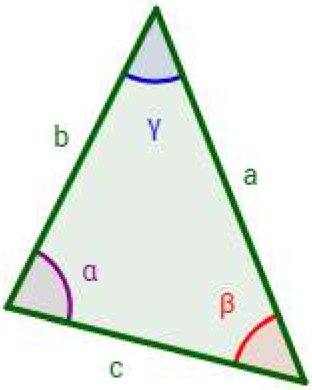
10. Calcula el área de un pentágono regular de radio 4 cm.

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. $\frac{5\pi}{6}$
2. 0,47
3. 165,19 u²
4. 0,85 rad (truncamiento)
5. tg α =4/3
6. cos α = -0,62
7. $\text{tg}\frac{-5\pi}{6} = \text{tg}\,30º = \frac{\sqrt{3}}{3}$
8. cos(180º − α)=−cos α =−3/5
9. 400,10 m
10. 38,04 m²



$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = D$$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\gamma)$$

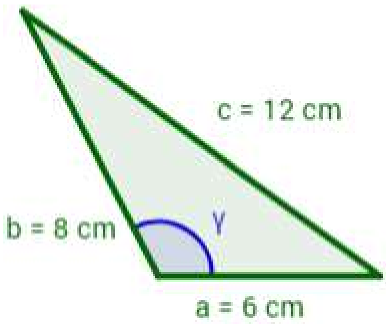
[illegible]

[illegible] [illegible]

[illegible]

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

[illegible]



$12^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \boldsymbol{\gamma}$

$144 = 36 + 64 - 96 \cdot \cos(\gamma)$

$144 - 36 - 64 = -96 \cdot \cos(\gamma)$

$44 = -96 \cdot \cos(\gamma)$

$44 / (-96) = \cos(\gamma)$

$4 / (-96) = \cos(\gamma)$

$-0{,}46 = \cos(\gamma)$

$\gamma = \text{arc} \cos(-0{,}46)$

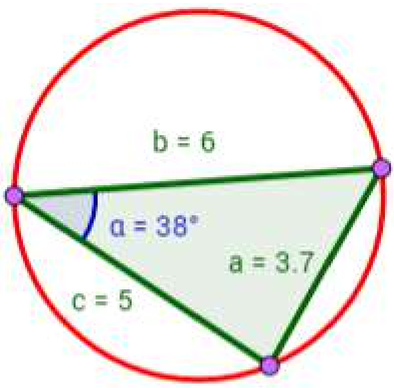
$\boldsymbol{\gamma = 117{,}4^{o}}$

[illegible] [illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = D$$



[illegible]

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = D$$

[illegible]

$$\frac{3}{\sin(38°)} = D$$

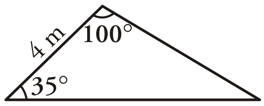
[illegible]

$$D = 4.8728\ cm$$

Resolución de triángulos de cualquier tipo

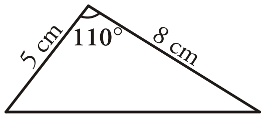
Ejercicio nº 1.-

Halla los lados y los ángulos de este triángulo:



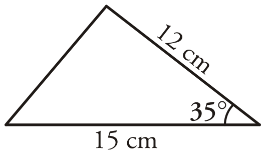
Ejercicio nº 2.-

Calcula los lados y los ángulos del siguiente triángulo:



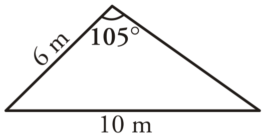
Ejercicio nº 3.-

Halla los lados y los ángulos del triángulo:



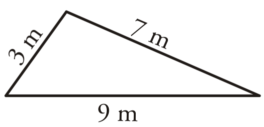
Ejercicio nº4.-

Resuelve el siguiente triángulo, es decir, halla el valor de sus lados y de sus ángulos:



Ejercicio nº 5.-

Resuelve el siguiente triángulo, es decir, halla sus lados y sus ángulos:



Ejercicio nº 6.-

En dos estaciones de radio, *A* y *C*, que distan entre sí 50 km, son recibidas señales que manda un barco, *B*. Si consideramos el triángulo de vértices *A*, *B* y *C*, el ángulo en *A* es de 65° y el ángulo en *C* es de 80°. ¿A qué distancia se encuentra el barco de cada una de las dos estaciones de radio?

Ejercicio nº 7.-

Sara y Manolo quieren saber a qué distancia se encuentra un castillo que está en la orilla opuesta de un río. Se colocan a 100 metros de distancia el uno del otro y consideran el triángulo en cuyos vértices están cada uno de los dos, y el castillo. El ángulo correspon-diente al vértice en el que está Sara es de 25° y el ángulo del vértice en el que está Manolo es de 140°. ¿A qué distancia se encuentra Sara del castillo? ¿Y Manolo?

Ejercicio nº 8.-

Dos de los lados, *a* y *b*, de una finca de forma triangular miden 20 m y 15 m, respectivamente. El ángulo comprendido entre estos dos lados es de 70°.
Si deseáramos vallar la finca, ¿cuántos metros de valla necesitaríamos?

Ejercicio nº 9.-

Dos barcos salen de un puerto a la misma hora con rumbos distintos, formando un ángulo de 110°. Al cabo de 2 horas, el primer barco está a 34 km del punto inicial y el segundo barco, a 52 km de dicho punto. En ese mismo instante, ¿a qué distancia se encuentra un barco del otro?

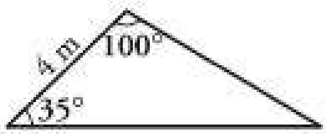
Ejercicio nº 10.-

Se desea unir tres puntos, *A*, *B* *y* *C*, mediante caminos rectos que unan *A* con *B*, *B* con *C* y *C* con *A*. La distancia de *A* a *B* es de 100 metros, el ángulo correspondiente a *B* es de 50°, y el ángulo en *A* es de 75°. ¿Cuál es la distancia entre *B* y *C* ? ¿Y entre *A* y *C* ?

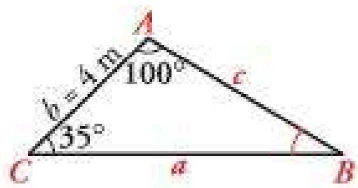
SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.-

Halla los lados y los ángulos de este triángulo:



Solución:



Como $\hat{A}+\hat{C}=100°+35°=135°<180°$, existe solución única.
Hallamos el ángulo $\hat{B}$:

$$\hat{B}=180°-\left(\hat{A}+\hat{C}\right)=180°-135°=45°$$

Con el teorema de los senos hallamos los lados a y c:

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}} \rightarrow \frac{a}{sen100°}=\frac{4}{sen45°} \rightarrow a=\frac{4sen100°}{sen45°}=5{,}57 \text{ m}$$

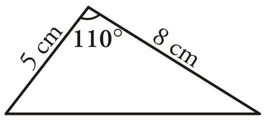
$$\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{c}{sen\hat{C}} \rightarrow \frac{4}{sen45^\circ}=\frac{c}{sen35^\circ} \rightarrow c=\frac{4sen35^\circ}{sen45^\circ} \rightarrow 3{,}24 \text{ m}$$

Por tanto:

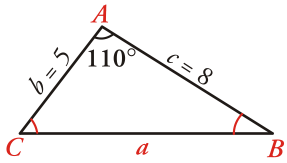
$a=5{,}57$ m; $\hat{A}=100^\circ$
$b=4$ m; $\hat{B}=45^\circ$
$c=3{,}24$ m; $\hat{C}=35^\circ$

Ejercicio nº 2.-

Calcula los lados y los ángulos del siguiente triángulo:



Solución:



Hallamos el lado a con el teorema del coseno:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$
$a^2=5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cdot\cos110^\circ$
$a^2=25+64+27{,}36$
$a^2=116{,}36$
$a=10{,}79$ cm

Al conocer los tres lados, la solución es única.

Calculamos el ángulo $\hat{B}$, aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}} \rightarrow \frac{10{,}79}{sen110^\circ}=\frac{5}{sen\hat{B}} \rightarrow sen\hat{B}=\frac{5sen110^\circ}{10{,}79}$$

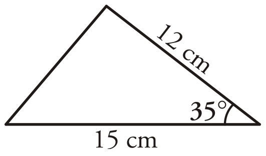
$sen\hat{B}=0{,}435 \rightarrow \hat{B}=25^\circ\ 48'\ 49''$
$\hat{C}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B}) \rightarrow \hat{C}=44^\circ\ 11'\ 11''$

Por tanto:

$a=10{,}79$ cm; $\hat{A}=110^\circ$
$b=5$ cm; $\hat{B}=25^\circ\ 48'\ 49''$
$c=8$ cm; $\hat{C}=44^\circ\ 11'\ 11''$

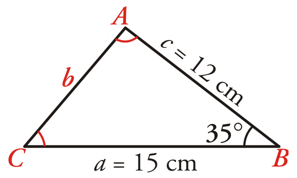
Ejercicio nº 3.-

Halla los lados y los ángulos del triángulo:



Solución:

Hallamos el lado b con el teorema del coseno:



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos \hat{B}$$
$$b^2 = 15^2 + 12^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12 \cdot \cos 35^\circ$$
$$b^2 = 225 + 144 - 294{,}89$$
$$b^2 = 74{,}11 \quad \rightarrow \quad b = 8{,}61 \text{ cm}$$

Como conocemos los tres lados, la solución es única.

Hallamos el ángulo $\hat{C}$:

$$\frac{c}{sen\hat{C}} = \frac{b}{sen\hat{B}} \quad \rightarrow \quad \frac{12}{sen\hat{C}} = \frac{8{,}61}{sen 35^\circ} \quad \rightarrow \quad sen\hat{C} = \frac{12 sen 35^\circ}{8{,}61}$$
$$sen\hat{C} = 0{,}799 \quad \rightarrow \quad \hat{C} = 53^\circ\ 4'\ 26''$$

Por último, hallamos el ángulo $\hat{A}$:

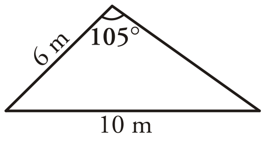
$$\hat{A} = 180^\circ - \left(\hat{B} + \hat{C}\right) = 91^\circ\ 55'\ 34''$$

Por tanto:

$$a = 15 \text{ cm}; \ \hat{A} = 91^\circ\ 55'\ 34''$$
$$b = 8{,}61 \text{ cm}; \ \hat{B} = 35^\circ$$
$$c = 12 \text{ cm}; \ \hat{C} = 53^\circ\ 4'\ 26''$$

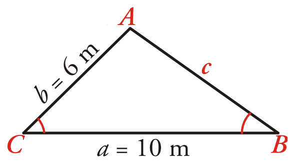
Ejercicio nº4.-

Resuelve el siguiente triángulo, es decir, halla el valor de sus lados y de sus ángulos:



Solución:

Hallamos el ángulo $\hat{B}$ con el teorema de los senos:



$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} \quad \rightarrow \quad \frac{10}{sen105^\circ} = \frac{6}{sen\hat{B}}$$

$$sen\hat{B} = \frac{6sen105^\circ}{10} = 0{,}58 \quad \rightarrow \quad \hat{B} = 35^\circ\ 25'9''$$

(Como $\hat{A}$ es obtuso, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ han de ser agudos; solo hay una solución).

Hallamos el ángulo de $\hat{C}$:

$$\hat{C} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 39^\circ\ 34'51''$$

Calculamos el lado c:

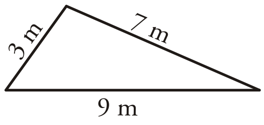
$$\frac{c}{sen\hat{C}} = \frac{a}{sen\hat{A}} \quad \rightarrow \quad \frac{c}{sen\left(39^\circ\ 34'51''\right)} = \frac{10}{sen105^\circ} \quad \rightarrow \quad c = 6{,}6 \text{ m}$$

Por tanto:

$a = 10$ m; $\hat{A} = 105^\circ$
$b = 6$ m; $\hat{B} = 35^\circ\ 25'9''$
$c = 6{,}6$ m; $\hat{C} = 39^\circ\ 34'51''$

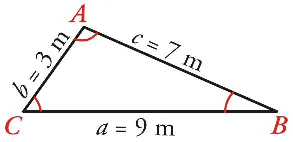
Ejercicio nº 5.-

Resuelve el siguiente triángulo, es decir, halla sus lados y sus ángulos:



Solución:

Como conocemos los tres lados (y cada lado es menor que la suma de los otros dos), existe solución única.
Hallamos los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ con el teorema del coseno:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$81 = 9 + 49 - 42\cos\hat{A}$$
$$42\cos\hat{A} = 9 + 49 - 81$$
$$42\cos\hat{A} = -23$$
$$\cos\hat{A} = -0{,}548 \quad \rightarrow \quad \hat{A} = 123^\circ\ 12'14''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \quad \rightarrow \quad 9 = 81 + 49 - 126\cos\hat{B}$$
$$126\cos\hat{B} = 81 + 49 - 9 \quad \rightarrow \quad 126\cos\hat{B} = 121$$
$$\cos\hat{B} = 0{,}960 \quad \rightarrow \quad \hat{B} = 16^\circ\ 11'42''$$

$\hat{C} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 40^\circ\ 36'\ 4''$

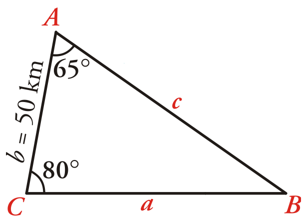
Por tanto:

$a = 9$ m; $\hat{A} = 123^\circ\ 12'14''$
$b = 3$ m; $\hat{B} = 16^\circ\ 11'42''$
$c = 7$ m; $\hat{C} = 40^\circ\ 36'\ 4''$

Ejercicio nº 6.-

En dos estaciones de radio, *A* y *C*, que distan entre sí 50 km, son recibidas señales que manda un barco, *B*. Si consideramos el triángulo de vértices *A*, *B* y *C*, el ángulo en *A* es de 65° y el ángulo en *C* es de 80°. ¿A qué distancia se encuentra el barco de cada una de las dos estaciones de radio?

Solución



Hallamos el ángulo $\hat{B}$:

$\hat{B} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{C}\right) = 35^\circ$

Hallamos los valores de a y c aplicando el teorema de los senos:

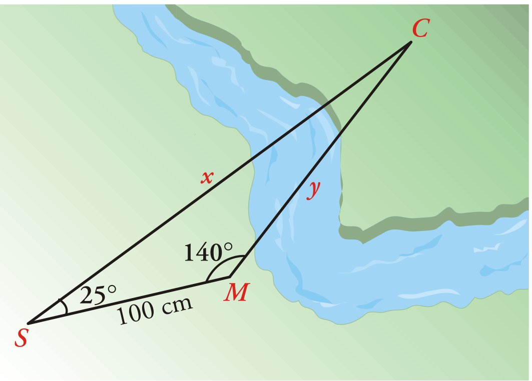
$$\frac{a}{sen 65^\circ} = \frac{50}{sen 35^\circ} \quad \rightarrow \quad a = \frac{50 sen 65^\circ}{sen 35^\circ} = 79 \text{ km}$$
$$\frac{c}{sen 80^\circ} = \frac{50}{sen 35^\circ} \quad \rightarrow \quad c = \frac{50 sen 80^\circ}{sen 35^\circ} = 85,85 \text{ km}$$

Por tanto, el barco está a 79 km de la estación C y a 85,85 km de la estación A.

Ejercicio nº 7.-

Sara y Manolo quieren saber a qué distancia se encuentra un castillo que está en la orilla opuesta de un río. Se colocan a 100 metros de distancia el uno del otro y consideran el triángulo en cuyos vértices están cada uno de los dos, y el castillo. El ángulo correspon-diente al vértice en el que está Sara es de 25° y el ángulo del vértice en el que está Manolo es de 140°. ¿A qué distancia se encuentra Sara del castillo? ¿Y Manolo?

Solución:



El ángulo $\hat{C}$ será:

$$\hat{C} = 180^\circ - \left(25^\circ + 140^\circ\right) = 15^\circ$$

Con el teorema de los senos hallamos los lados x e y:

$$\frac{x}{sen140^\circ} = \frac{100}{sen15^\circ} \quad \rightarrow \quad x = \frac{100sen140^\circ}{sen15^\circ} = 248{,}35 \text{ m}$$

$$\frac{y}{sen25^\circ} = \frac{100}{sen15^\circ} \quad \rightarrow \quad y = \frac{100sen25^\circ}{sen15^\circ} = 163{,}29 \text{ m}$$

Por tanto:

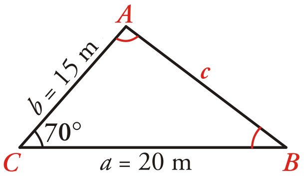
Sara está a 248,35 m del castillo y Manolo, a 163,29 m.

<u>Ejercicio nº 8.-</u>

Dos de los lados, *a* y *b*, de una finca de forma triangular miden 20 m y 15 m, respectivamente. El ángulo comprendido entre estos dos lados es de 70°.
Si deseáramos vallar la finca, ¿cuántos metros de valla necesitaríamos?

Solución:

Hallamos el lado c aplicando el teorema del coseno:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\hat{C}$$
$$c^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \cdot 20 \cdot 15 \cdot cos\hat{C}$$
$$c^2 = 400 + 225 - 600 \cdot cos70^\circ$$
$$c^2 = 400 + 225 - 205{,}21$$
$$c^2 = 419{,}79 \quad \rightarrow \quad c = 20{,}49 \text{ m}$$

Los metros de valla necesarios serían:

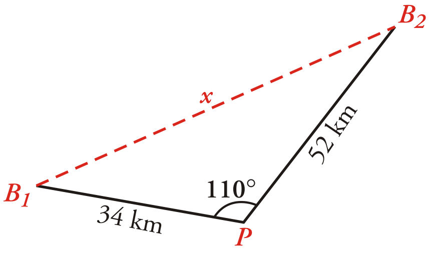
$$a + b + c = 20 + 15 + 20{,}49 = 55{,}49 \text{ m}$$

Ejercicio nº 9.-

Dos barcos salen de un puerto a la misma hora con rumbos distintos, formando un ángulo de 110°. Al cabo de 2 horas, el primer barco está a 34 km del punto inicial y el segundo barco, a 52 km de dicho punto. En ese mismo instante, ¿a qué distancia se encuentra un barco del otro?

Solución:

Hallamos la distancia, x, aplicando el teorema del coseno:



$$x^2 = 34^2 + 52^2 - 2 \cdot 34 \cdot 52 \cdot cos110^\circ$$
$$x^2 = 1156 + 2704 + 1\,209{,}38$$
$$x^2 = 5069{,}38$$
$$x = 71{,}20 \text{ km}$$

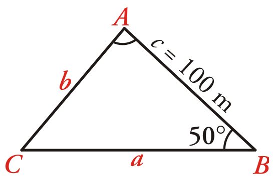
Por tanto, la distancia entre los dos barcos es de 71,20 km.

Ejercicio nº 10.-

Se desea unir tres puntos, *A*, *B* y *C*, mediante caminos rectos que unan *A* con *B*, *B* con *C* y *C* con *A*. La distancia de *A* a *B* es de 100 metros, el ángulo correspondiente a *B* es de 50°, y el ángulo en *A* es de 75°. ¿Cuál es la distancia entre *B* y *C*? ¿Y entre *A* y *C*?

Solución:

Hallamos el ángulo $\hat{C}$:



$$\hat{C} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 55^\circ$$

Calculamos a y b aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{sen75^\circ} = \frac{100}{sen55^\circ} \quad \rightarrow \quad a = \frac{100 \cdot sen75^\circ}{sen55^\circ} = 117{,}92 \text{ m}$$

$$\frac{b}{sen50^\circ} = \frac{100}{sen55^\circ} \quad \rightarrow \quad b = \frac{100 \cdot sen50^\circ}{sen55^\circ} = 93{,}52 \text{ m}$$

Por tanto, la distancia entre B y C es de 117,92 m y la distancia entre A y C es de 93,52 m.

7. Vectores en el plano. Ecuaciones de la recta

Introducción

¿Por qué La Geometría?

La Geometría tiene como objetivo fundamental ayudar al hombre a explorar y controlar racionalmente las estructuras del espacio en el que vive.

Su origen es probablemente tan antiguo como el de la propia Aritmética. El hombre llega a ella a través de la observación de la naturaleza y fundamentalmente del cielo.

La utilizará para construir utensilios, edificar sus casas, fabricar herramientas y armas, etc.

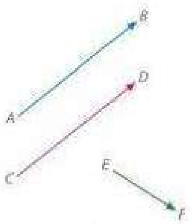
Su desarrollo más espectacular se produce a partir del siglo XVII, en el que Descartes desarrolla el método de representación de puntos en el plano mediante coordenadas. Dicho método es el que intentaremos presentar aquí de forma sencilla con la ayuda de los vectores libres del plano.

Geometría del plano

Vector libre en el plano

El segmento orientado que une dos puntos del plano, A y B, se denomina **vector fijo** de extremos A y B y se representa $\vec{AB}$.

Un vector fijo , $\vec{AB}$, es un segmento orientado que tiene su origen en el punto A y su extremo en el punto B.



Todo vector fijo viene determinado por los elementos siguientes:

1. Módulo del vector. Es la distancia que separa los puntos A y B.

Se representa por $|\vec{AB}|$.

2. Dirección del vector. Es la recta que contiene al segmento que lo determina.

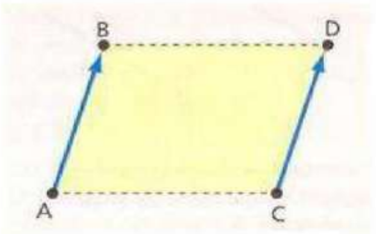
3. Sentido del vector. Es el que marca la flecha desde su origen a su extremo.

Los vectores se utilizan para establecer y marcar direcciones y sentidos de recorrido tanto en situaciones que pueden representarse en el plano como en el espacio.

Los vectores fijos tienen un problema. Dos vectores fijos que tengan la misma dirección, módulo y sentido son objetos distintos y eso, no tiene mucho sentido pues los dos podrían servir, por ejemplo, para marcar la misma dirección o camino y pasando a desempeñar su papel al aplicarlos sobre los puntos en los que se necesitase en cada situación.

Al mundo matemático no le interesa que esos dos vectores (y los que como ellos tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo) sen distintos.

Se dice que dos vectores fijos son equipolentes si tiene la misma dirección, módulo y sentido.



Los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ de la figura son equipolentes. De forma gráfica es fácil distinguirlo porque los 4 puntos son los vértices de un **paralelogramo** (polígono de 4 lados con ellos paralelos dos a dos).

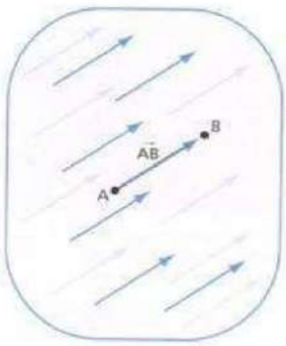
Se llama vector libre al conjunto de todos los vectores que son equipolentes entre sí.

Se denotan con letra minúsculo y la flecha como símbolo de vector ($\vec{u}$).

Al conjunto de todos los vectores libres del plano se le denomina V^2.

Así diremos que $\vec{AB} = \vec{u}$ y $\vec{CD} = \vec{u}$.

También podemos decir que cualquier vector libre puede ser representado mediante un vector fijo que tenga su origen o su extremo en un punto cualquiera del plano.



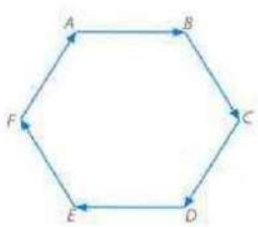
Vector libre $[\vec{AB}]$

Para saber más:

[Vector libre]

Autoevaluación

Compara los vectores que determinan los vértices del hexágono de la ilustración



¿Qué vectores tienen el mismo módulo?

a) Ninguno
b) Todos
c) Dos a dos de ellos
d) Tres a tres de ellos

Comprobar

¿Qué vectores tiene la misma dirección?

a) Ninguno
b) Todos
c) Las parejas que son paralelos entre sí
d) Los dos que unen los puntos AB y DE.

Comprobar

¿Qué vectores tienen el mismo sentido?

a) Ninguno
b) Todos
c) Dos a dos de ellos
d) Tres a tres de ellos

Comprobar

¿Qué vectores son equipolentes entre sí?

a) Todos
b) Ninguno
c) Dos a dos de ellos
d) Tres a tres de ellos

Comprobar

ometría del plano

Operaciones con vectores

Todos los vectores equipolentes entre sí que tienen por origen y extremo el mismo punto del plano se denominan **vector libre nulo** y se representa por $\vec{o}$ o también por $\vec{\mathbf{0}}$. Este vector se caracteriza por no tener dirección, no tener sentido y su módulo es 0.

Para un vector libre $\vec{a}$, se llama **vector opuesto** al vector $\vec{a}$, y se representa por $-\vec{a}$, al vector que tiene el mismo módulo que $\vec{a}$, su misma dirección y sentido el opuesto.

Los vectores libres de V^2 admiten dos operaciones fundamentales que las definiremos en principio de forma gráfica en este apartado:

Suma de vectores libres

Dados dos vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ ***del plano, se llama suma de*** $\vec{a}$ y $\vec{b}$ ***al vector libre que se obtiene del siguiente modo:***

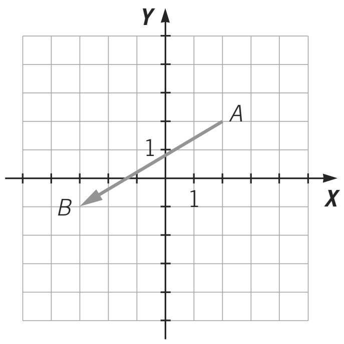
7. Vectores en el plano. Ecuaciones de la recta

7.1 Elementos de un vector:

- **Vector:** segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ determinado por dos puntos: $A\ (a_1,\ a_2)$, origen del vector, y $B\ (b_1,\ b_2)$, extremo del vector.
- **Coordenadas** del vector: $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)$
- **Módulo:** $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

EJEMPLO

Calcula las coordenadas y el módulo del siguiente vector.



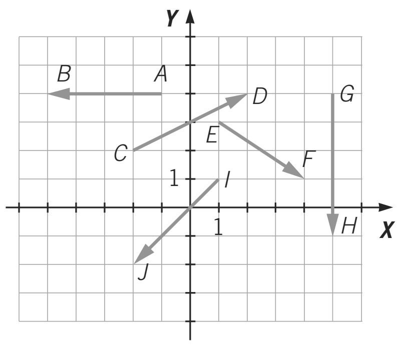
Origen: $A\ (2,\ 2)$

Extremo: $B\ (-3,\ -1)$

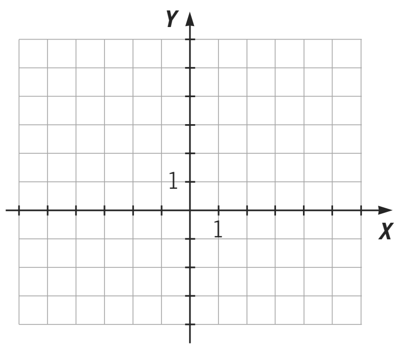
Coordenadas: $\overrightarrow{AB} = (-3 - 2,\ -1 - 2) = (-5,\ -3)$

Módulo: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$

1 **¿Cuáles son las coordenadas y el módulo de los siguientes vectores?**



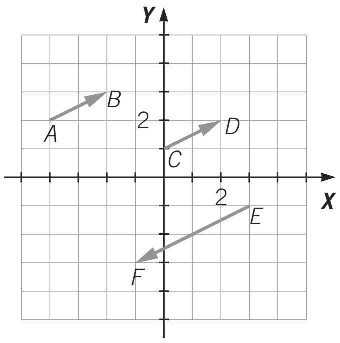
2 **Dados los puntos $A(3,\ 6)$, $B(-3,\ 0)$, $C(0,\ -5)$ y $D(-2,\ 7)$, representa y calcula las coordenadas y el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{DA}$.**



- **Dirección** de un vector es la recta sobre la que está situada el vector.
- **Sentido** de un vector es la forma de recorrer el segmento AB; es decir, de fijar el origen y el extremo.
- **Vectores equivalentes** son aquellos que tienen el mismo módulo, dirección y sentido, por lo que sus coordenadas son iguales.
- **Vectores paralelos** son los que tienen la misma dirección, sus coordenadas son proporcionales.

EJEMPLO

Determina si estos vectores son equivalentes.



$\overrightarrow{AB} = (-2 - (-4), 3 - 2) = (2, 1)$

$\overrightarrow{CD} = (2 - 0, 2 - 1 = (2, 1)$

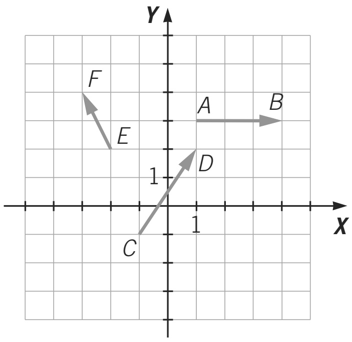
$\overrightarrow{EF} = (-1 - 3, -3 - (-1)) = (-4, -2)$

$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen las mismas coordenadas; por tanto, son equivalentes.

Las coordenadas de $\overrightarrow{EF}$ son proporcionales a las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$: $\dfrac{2}{-4} = \dfrac{1}{-2}$.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ son paralelos.

3 **Dibuja dos vectores equivalentes y dos paralelos, pero que no sean equivalentes, a cada uno de los dados. Demuestra numéricamente su equivalencia.**



4 **Dibuja los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$, siendo $A(4, -1)$ y $B(-5, 0)$, y contesta a las siguientes cuestiones.**

a) ¿Son equivalentes?

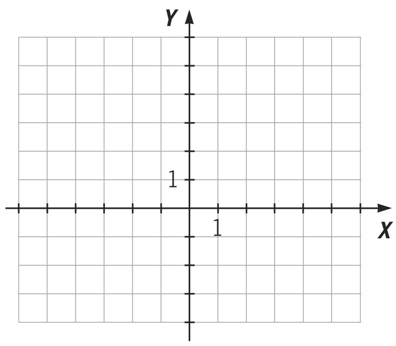
b) ¿Y paralelos?

c) ¿Tienen la misma dirección?

d) ¿Cómo son sus sentidos?

e) ¿Cuáles son el origen y el extremo de cada uno?

f) Calcula sus módulos.

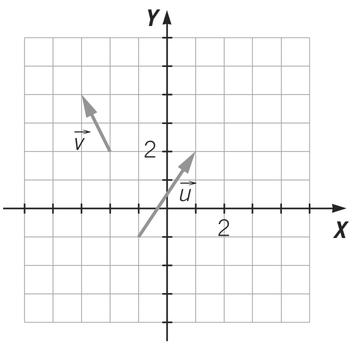


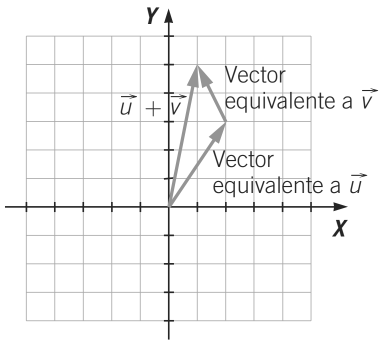
Operaciones con vectores:

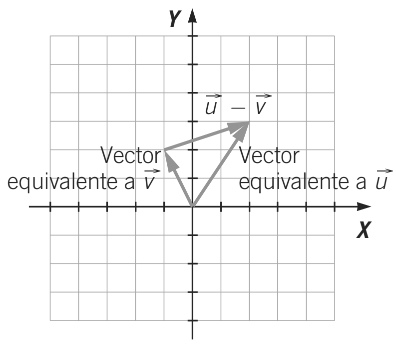
- Para **sumar** gráficamente dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se toma uno ellos, $\vec{u}$, y con origen en su extremo se dibuja un vector equivalente a $\vec{v}$. La suma $\vec{u} + \vec{v}$ es otro vector cuyo origen es el origen de $\vec{u}$, y su extremo es el extremo de $\vec{v}$.
- En coordenadas, si las coordenadas de $\vec{u}$ son (u_1, u_2) y las coordenadas de $\vec{v}$ son (v_1, v_2), el **vector suma** es: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- Para **restar** gráficamente dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se toman vectores equivalentes a ambos que tengan el mismo origen, y la diferencia es otro vector que tiene como origen el extremo de $\vec{v}$, y como extremo, el extremo de $\vec{u}$.
- En coordenadas, si las coordenadas de $\vec{u}$ son (u_1, u_2) y las coordenadas de $\vec{v}$ son (v_1, v_2), el **vector diferencia** es: $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

EJEMPLO

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura, calcula gráficamente y por coordenadas los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.







$\vec{u} = (1 - (-1), 2 - (-1)) = (2, 3)$
$\vec{v} = (-3 - (-2), 4 - 2) = (-1, 2)$
$\vec{u} + \vec{v} = (2 + (-1), 3 + 2) = (1, 5)$
$\vec{u} - \vec{v} = (2 - (-1), 3 - 2) = (3, 1)$

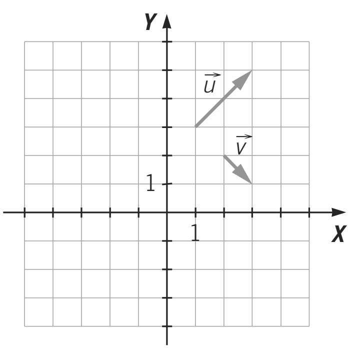
1 **Las coordenadas de los puntos *A*, *B*, *C* y *D* son:**

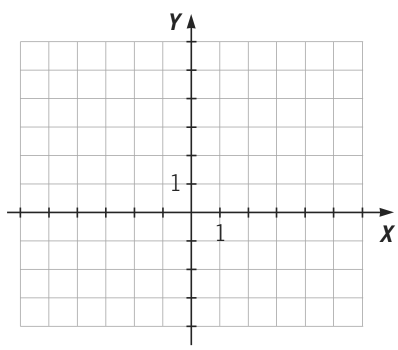
$A(-1, 3)$ $\quad$ $B(0, 6)$ $\quad$ $C(4, -7)$ $\quad$ $D(-4, 0)$

Calcula el resultado de estas operaciones.

a) $\vec{AB} + \vec{CD}$ $\quad$ b) $\vec{AB} - \vec{CD}$ $\quad$ c) $\vec{CD} - \vec{AB}$ $\quad$ d) $\vec{AB} - \vec{AB}$ $\quad$ e) $\vec{CD} + \vec{CD}$ $\quad$ f) $-\vec{AB} - \vec{CD}$

2 **Halla gráficamente el vector suma $\vec{u} + \vec{v}$ y el vector diferencia $\vec{u} - \vec{v}$.**





- Para **multiplicar un vector $\vec{u}$ por un número** real k se multiplica el módulo del vector por el número real, y se mantiene la dirección del vector. El sentido será el mismo si k es positivo, y contrario, si k es negativo.
- En coordenadas, si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, el **producto de un número real** k por un vector $\vec{u}$ se calcula multiplicando cada coordenada por el número k.

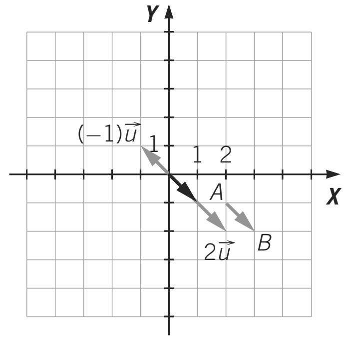
EJEMPLO

Dado el vector $\vec{u}$, de origen $A(2, -1)$ y extremo $B(3, -2)$, calcula gráfica y analíticamente el producto de $\vec{u}$ por los números 2 y -1.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3 - 2, -2 - (-1)) = (1, -1)$

$2\vec{u} = 2 \cdot (1, -1) = (2, -2)$

$(-1)\vec{u} = (-1) \cdot (1, -1) = (-1, 1)$



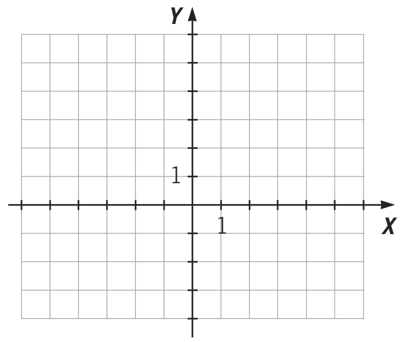
3 **Sabiendo que $A(-3, 3)$ y $B(-1, 5)$, calcula gráfica y analíticamente $k \cdot AB$.**

a) $k = 2$

b) $k = -4$

c) $k = \frac{1}{2}$

d) $k = 3$



- La suma de un punto A más un vector $\vec{u}$ es otro punto B que resulta de trasladar el punto A según el vector $\vec{u}$.
- En coordenadas, si $A(a_1, a_2)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2)$, su suma es el punto $B(b_1, b_2) = (a_1 + u_1, a_2 + u_2)$.

EJEMPLO

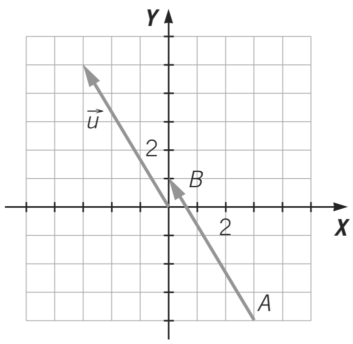
Resuelve los apartados.

a) Si $A(3, -4)$ y el vector $\vec{u} = (-3, 5)$, calcula las coordenadas del punto $B = A + \vec{u}$, y representa el resultado gráficamente.

b) Si $A'(-3, 0)$ es el trasladado de A por el vector $\vec{v}$, ¿cuáles son las coordenadas de $\vec{v}$?

a) $B = A + \vec{u} = (3, -4) + (-3, 5) = (3 + (-3), -4 + 5) = (0, 1)$

b) $A' = A + \vec{v} \rightarrow (-3, 0) = (3 + v_1, -4 + v_2) \rightarrow v_1 = -6$ y $v_2 = 4$



4 **Si trasladamos el punto A por el vector $\vec{u}$ para obtener el punto B, calcula los valores x e y. Representa los puntos trasladados.**

a) $A(0, -5)$ $\quad \vec{u} = (x, y) \rightarrow B(5, 0)$

b) $A(-3, x)$ $\quad \vec{u} = (4, 3) \rightarrow B(y, 2)$

7.2 Ecuaciones de la recta.

- Si $A(a, b)$ es un punto de la recta, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es un vector de la recta, y t es un número real, cualquier punto $P(x, y)$ de la recta se puede obtener con la **ecuación vectorial**:

$$(x, y) = (a, b) + t \cdot (v_1, v_2)$$

- El vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ se llama **vector director** de la recta.
- Las **ecuaciones paramétricas** de la recta son: $\left.\begin{array}{l} x = a + t \cdot v_1 \\ y = b + t \cdot v_2 \end{array}\right\}$

EJEMPLO

Dados los puntos $A(-2, 5)$ y $B(-1, 1)$ de una recta:

a) Calcula la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas.

b) Estudia si el punto $C(-1, 9)$ pertenece a la recta.

Como la recta pasa por los puntos A y B, podemos tomar como vector director de la recta $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-1 - (-2), 1 - 5) = (1, -4)$.

a) Las ecuaciones pedidas son:

- Ecuación vectorial: $(x, y) = (-2, 5) + t \cdot (1, -4)$
- Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x = -2 + t \\ y = 5 - 4t \end{array}\right\}$

b) En las ecuaciones paramétricas sustituimos las coordenadas del punto C por x e y: $\left.\begin{array}{r} -1 = -2 + t \\ 9 = 5 - 4t \end{array}\right\}$.

Despejamos t en las dos ecuaciones: $\left\{\begin{array}{l} t = -1 + 2 = 1 \\ t = \dfrac{9 - 5}{-4} = 1 \end{array}\right.$. Como en ambos casos se obtiene el mismo valor, se determina que $C(-1, 9)$ pertenece a la recta.

1 **Dada la siguiente ecuación vectorial de una recta: $(x, y) = (4, 8) + t \cdot (-3, 5)$, indica un punto de esa recta y su vector director.**

2 **Escribe la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(-5, 2)$ y $B(0, 1)$.**

3 **Estudia si los puntos $A(7, 4)$, $B(1, 2)$ y $C(0, 0)$ pertenecen o no a la recta: $\left.\begin{array}{l} x = 3 + 2t \\ y = 2t \end{array}\right\}$**

Si $A(a, b)$ es un punto concreto de la recta, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es su vector director y $P(x, y)$ es un punto genérico, tenemos las siguientes ecuaciones de la recta.

- **Ecuación continua:** $\dfrac{x - a}{v_1} = \dfrac{y - b}{v_2}$
- **Ecuación punto-pendiente:** $y - b = m(x - a)$
- **Ecuación explícita:** $y = mx + n$
- $m = \dfrac{v_1}{v_2}$ es la **pendiente de la recta** y $n = b - \dfrac{v_1}{v_2}a$ es la **ordenada en el origen**.

EJEMPLO

Dada la recta expresada en forma vectorial: $(x, y) = (2, 1) + t \cdot (4, 3)$

a) Halla sus ecuaciones en forma continua, punto-pendiente y explícita.

b) Indica su pendiente y su ordenada en el origen.

a) Un punto de la recta es $A(2, 1)$, su vector director es $\vec{v} = (4, 3)$, y la ecuación continua es: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{3}$. Multiplicando en cruz, se tiene que $4(y - 1) = 3(x - 2)$, obteniendo la ecuación punto-pendiente de la recta: $y - 1 = \dfrac{3}{4}(x - 2)$

Por último, despejando y, y operando obtenemos la ecuación explícita de la recta:

$y - 1 = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{2} \rightarrow y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}$

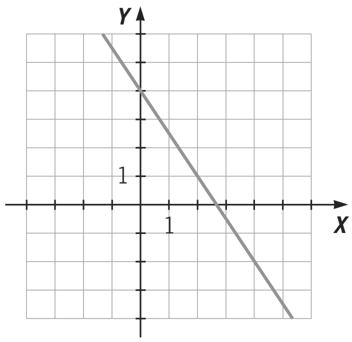
b) La pendiente es $m = \dfrac{3}{4}$ y la ordenada en el origen es $n = -\dfrac{1}{2}$.

4 **Dada la recta de la gráfica, se pide:**

a) Las coordenadas de dos de sus puntos.

b) El vector director.

c) Su ecuación continua.



5 **Expresa la ecuación que pasa por el punto $A(1, -2)$ y que tiene por vector director $\vec{v} = (-1, 1)$ mediante sus ecuaciones:**

a) Punto-pendiente.

b) Explícita.

La **ecuación general o implícita** de la recta es de la forma:

$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$$

donde A, B y C son números reales.

El vector director de la recta es $\vec{v} = (B, -A)$.

La pendiente de la recta es $m = \frac{-A}{B}$.

La ordenada en el origen o punto de corte con el eje Y es $n = \frac{-C}{B}$.

EJEMPLO

Resuelve los apartados.

a) Da la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $P(1, -2)$ y $Q(0, 3)$.

b) Indica cuáles son la pendiente y la ordenada en el origen.

a) Calculamos el vector director: $\overrightarrow{PQ} = (0 - 1, 3 - (-2)) = (-1, 5) = (B, -A)$

Por lo tanto $-5x - y + C = 0$

Para hallar el valor de C sustituimos uno de los puntos dados; por ejemplo, $Q(0, 3)$, y despejamos C: $-5 \cdot 0 - 3 + C = 0 \rightarrow C = -3$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-5x - y - 3 = 0$

b) La pendiente es $m = \frac{5}{-1} = -5$ y la ordenada en el origen es $n = \frac{3}{-1} = -3$.

6 **Calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(2, 2)$ y $B(-2, 3)$.**

7 **A partir de la ecuación $2x - 3y + 2 = 0$ de una recta, halla el vector director, la pendiente y la ordenada en el origen.**

8 **¿Cuál es la ecuación general o implícita de la recta cuya ecuación explícita es $y = 3x + 4$?**

9 **Dada la ecuación $-2x + y - 8 = 0$ de una recta, escribe su ecuación punto-pendiente.**

7.3 Posiciones relativas de la recta.

POSICIONES	VECTORES DIRECTORES	PENDIENTES	ECUACIÓN GENERAL
Paralelas (igual dirección y sin puntos comunes)	Proporcionales $\frac{\vec{v_2}}{\vec{v_1}} = \frac{\vec{u_2}}{\vec{u_1}}$	Iguales $m = m'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
Coinidentes (igual dirección y todos los puntos comunes)	Proporcionales $\frac{\vec{v_2}}{\vec{v_1}} = \frac{\vec{u_2}}{\vec{u_1}}$	Iguales $m = m'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$
Secantes (distinta dirección y un punto en común)	No proporcionales $\frac{\vec{v_2}}{\vec{v_1}} \neq \frac{\vec{u_2}}{\vec{u_1}}$	Distintas $m \neq m'$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$

EJEMPLO

Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas.

a) $r: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{1}$

$s: x - 3y - 12 = 0$

b) $r: y = 5x - 2$

$s: (x, y) = (2, -1) + t(-2, 1)$

a) El vector director de r es $(3, 1)$ y el vector director de s es $(-3, -1)$. Los vectores directores son proporcionales: $\dfrac{1}{3} = \dfrac{-1}{-3}$.

Para ver si las rectas son paralelas o coincidentes tomamos el punto $(-2, 0)$ de r y lo sustituimos en s para ver si cumple o no su ecuación: $-2 - 3 \cdot 0 - 12 \neq 0$, y se deduce que no pertenece a s. Las rectas r y s son paralelas.

b) La pendiente de r es $m = 5$ y el vector director de s es $\vec{v} = (-2, 1)$, por lo que la pendiente de s es $m' = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2} \neq 5$. Las rectas r y s son secantes.

1 **Escribe la ecuación de una recta paralela a la recta r: $y = -x + 5$ que pase por el punto $(0, 0)$ de todas las formas indicadas.**

a) Vectorial.

b) Punto-pendiente.

c) General.

2 **Escribe la ecuación de una recta secante a la recta r: $y = -x + 5$ que pase por el punto $(0, 0)$ de todas las formas indicadas.**

a) Vectorial.

b) Punto-pendiente.

c) General.

3 **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas.**

a) $r\colon \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-1}{-2}$
$s\colon x + 2y - 1 = 0$

b) $r\colon y = 2x - 1$
$s\colon y - 3 = -(x + 2)$

c) $r\colon -3x - 3y + 3 = 0$
$s\colon x + y + 2 = 0$

Dada la recta que pasa por un punto $A(a, b)$, cuyo vector director es $\vec{v} = (v_1, v_2)$, si una de sus dos coordenadas es cero, la recta es paralela a uno de los ejes de coordenadas.

- Si $v_1 \neq 0$ y $v_2 = 0$, la ecuación de la recta es $y = b$. Es una recta paralela al eje X.
- Si $v_1 = 0$ y $v_2 \neq 0$, la ecuación de la recta es $x = a$. Es una recta paralela al eje Y.

Las rectas paralelas a los ejes no se pueden expresar mediante una ecuación en forma continua, ya que una de las coordenadas de su vector director es cero.

EJEMPLO

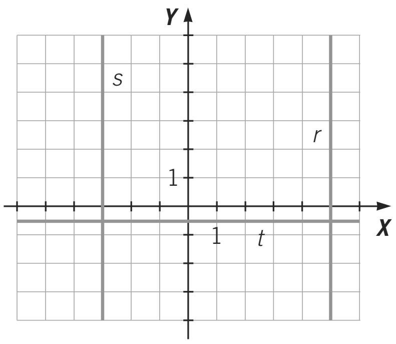
Expresa la recta que pasa por el punto *A*(0, 3) y *B*(4, 3) mediante sus ecuaciones:

a) Vectorial. **b) General.**

a) Su vector director es $\overrightarrow{AB} = (4 - 0, 3 - 3) = (4, 0)$, y pasa por cualquiera de los puntos dados, por ejemplo, por A. La ecuación vectorial es: $(x, y) = (0, 3) + t \cdot (4, 0)$

b) Puesto que los dos puntos dados tienen como segunda coordenada 3, la ecuación general es: $y = 3$.

4 **Escribe las ecuaciones general y paramétricas de las siguientes rectas.**



5 **Expresa, mediante las ecuaciones vectorial y explícita, las siguientes rectas.**

a) Paralela al eje Y, y que pasa por el punto $A\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

b) Paralela al eje X, y que pasa por el punto $B(0, 7)$.

UNIDAD DIDÁCTICA 4
FUNCIONES Y GRÁFICAS

1. Funciones y gráficas

Una **función** es una relación entre dos variables de tal manera que para cada valor de la primera tenemos un único valor de la segunda.

Se representa de forma general por **y = f(x)**

Donde **f** es la relación, **x** es la variable independiente, a la que damos valores, e **y** es la variable dependiente, de la que obtenemos valores.

Llamamos **dominio** de la función al conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente, y **recorrido** a todos los valores que puede tomar la variable dependiente.

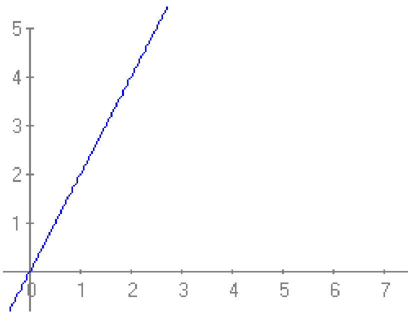
Una función se pude representar de diferentes maneras:

A) Mediante una **frase** que exprese la relación entre dos variables:

Cada kilo de manzanas cuesta 2 euros

B) Mediante una **tabla de valores**

Número de kg (x)	1 kg	2 kg.	3 kg.	4 kg.	5 kg.
Precio (y)	2 €	4	6	8	



C) Mediante una **fórmula**,

y = 2x

D) Mediante una **gráfica**

1. La ecuación de una función es y = 4 x

a) Construye una tabla dando a x los valores que quieras y calculando los correspondientes valores de y.
b) Represanta los puntos que has obtenido en unos ejes cartesianos.
c) Como a x puedes darle cualquier valor y obtendrás el valor correspondiente de la y, puedes unir los puntos que has dibujado para tener la gráfica de toda la función.

2. Representa gráficamente la ecuación *y = 2x* para cualquier valor de *x* comprendido entre 0 y 3, ambos inclusive.

3. ¿Son funciones estas correspondencias? Justifica tus respuestas:

a) El peso de una bolsa de naranjas en relación con su precio.
b) El nombre y la edad de tus compañeros de clase.
c) La edad y la talla de tus amigos
d) La superficie y el volumen de los pantanos de España.
e) Los países de Europa y sus capitales

4. Representa gráficamente las siguientes funciones en el conjunto de números comprendido entre 0 y 5, ambos inclusive:

a) La que asigna a cada número su doble menos dos.
b) La definida por la ecuación y = 2x-3.
c) La definida por la ecuación y = 2x -1.

1.1. Funciones lineales

Las **funciones lineales** son funciones de primer grado, es decir, funciones en las que la variable independiente (x) tiene como exponente 1.

- ✓ Su ecuación es de la forma: **y = mx** (siendo m distinta de 0)
- ✓ Su gráfica es una **recta inclinada que pasa por el origen** de coordenadas y cuya **pendiente es m.**
- ✓ La **pendiente** de una recta indica el grado de variación de **y** al variar **x**.

- Si **m es positiva**, la función es **creciente**. (al aumentar x, aumenta y)
- Si **m es negativa**, la función es **decreciente** (al aumentar x, disminuye y)

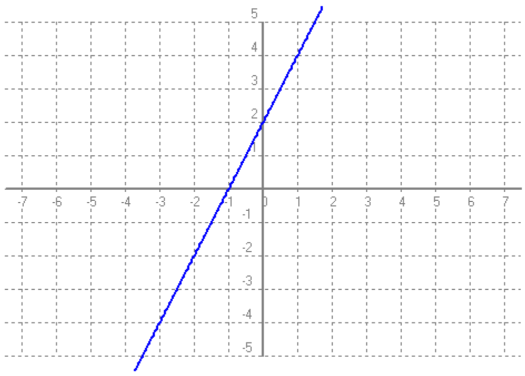
5. El precio de una barra de pan es 0,60 €. Estudiaremos la variación del precio del pan en función de las barras que compremos.

a) Construye una tabla que relacione el número de barras con el precio. Escribe en una fila las distintas cantidades de barras (1, 2, 3, 4 ...) y debajo sus precios correspondientes.
b) La relación entre número de barras y precio ¿es una función?¿Por qué?
c) Llama «x» al número de barras e «y» a su precio. Escribe una expresión algebraica que relacione las barras con el precio.
d) Representa en unos ejes cartesianos la gráfica de esta función. ¿Qué clase de línea es?
e) ¿Crees que la gráfica debe pasar por el origen de coordenadas? ¿Cuánto nos cobrarán si compramos 0 barras de pan, es decir, ninguna?

6. Representa la gráfica de estas funciones lineales. Utiliza un color diferente para cada una con el fin de distinguirlas mejor.

y = 2x y = x y = - 2x y = 4x

b) Escribe el valor de pendiente de cada una de estas funciones lineales.
c) ¿Cuáles son crecientes? ¿Cuáles son decrecientes?



1.2. Funciones afines.

Otro tipo de funciones de primer grado son las **funciones afines**. También su gráfica es una recta, pero no tiene que pasar por el origen de coordenadas como en las funciones lineales.

- ✓ Su ecuación tiene la forma: **y = mx + n**. (siendo m y n distinto de 0)
- ✓ Su gráfica es **una recta que no pasa por el origen de coordenadas.**
- ✓ El valor de **m** nos da la **pendiente** de la recta (creciente o decreciente)
- ✓ El valor de n la ordenada en el origen, es decir el valor de y cuando la x vale cero.

7. Representa en una gráfica estas cuatro funciones:

y = 3x + 2 y = 3x - 2 y = 4x + 2 y = 4x + 5

a) Haz una tabla de valores para cada una de ellas y representa las cuatro, con diferentes colores, en unos ejes coordenados.
b) ¿En qué punto corta cada una de ellas al eje y?
c) ¿Son paralelas algunas de estas rectas? ¿Cuáles?

- ✓ Si dos rectas tienen la misma pendiente, son paralelas.
- ✓ El número **n** se llama **ordenada en el origen**. La recta corta al eje de ordenadas en el punto (0,b).

La pendiente y la ordenada en el origen pueden ser cualquier número, positivo o negativo, etc.

8. Representa la gráfica de estas funciones afines. Empieza por hacer una tabla de valores para cada una de ellas y representa los puntos que obtengas. Después dibuja la línea que une todos esos puntos.

y = -3x + 2 y =-4x+2 y =-2x-3 y = -3x –2

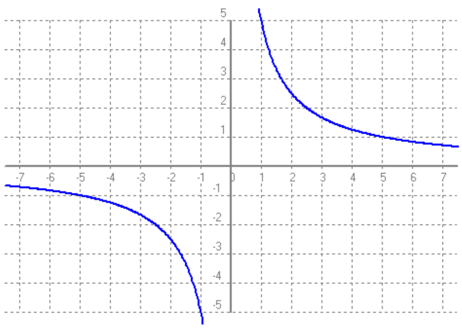
a) ¿Cuál es la pendiente de cada una de estas rectas?
b) ¿E n qué punto corta cada una de las rectas al eje Y? ¿Cuál es la ordenada en el origen de cada una de ellas?

9. El sueldo mensual de una encuestadora es de 250 € más 10 € por cada encuesta realizada en el mes.

a) Escribe la ecuación que relaciona su sueldo (y) con el número de encuestas realizadas (x). ¿Qué tipo de función es?
b) Haz la gráfica de esta función. Toma el número de encuestas de 10 en 10 y el sueldo en cientos de euros.
c) ¿Cuántas encuestas debe hacer para ganar 750 €? ¿Y para ganar 1.250 €?

10. La compañía eléctrica cobra todos los meses 15, 20 € fijos en concepto de alquiler de equipo y 0, 16 € por kW/h consumido.

a) Calcula a cuánto asciende la factura de la luz un mes que consumimos 400 kW/h. ¿Y si consumimos 300 kW/h? ¿Y 200 kW/h? Construye una tabla de valores que relacione el valor de la factura con el número de kW/h consumidos.
b) Realiza la gráfica de la función que relaciona el número de kW/h consumidos con el valor de la factura.
c) ¿Cuál es la ecuación de esta función?



1.3. Funciones de proporcionalidad inversa

Relacionan dos magnitudes que son **inversamente proporcionales**. Su formulación matemática es:

x · y = k o y = k/x

Donde k es una constante, un número distinto de cero.

- ✓ La función no corta a los ejes.
- ✓ El dominio y el recorrido de la función son todos los números reales menos el cero.
- ✓ Estas funciones son, o siempre crecientes o siempre decrecientes. Dependen del valor de la constante (k). Si es negativa son crecientes, y si es positiva son decrecientes.

11. Vamos a representar gráficamente esta función de proporcionalidad inversa:

$$y = \frac{6}{x}$$

a) Rellena esta tabla de valores:

x	1	2	3	6	-1	-2	-3

b) Representa en unos ejes los valores obtenidos.
c) Si das valores cada vez mayores a la x, ¿qué pasa con los valores que va tomando la y?
d) ¿Qué pasa con la **y** si vas dando a la **x** valores cada vez más próximos al **0.** x = 0,5; x = 0,25; x = 0,1 ...)?

e) ¿Puede la x valer 0?

12. Representa gráficamente:

a) $\frac{4}{x}$ b) $\frac{12}{x}$ c) $\frac{-6}{x}$

1.4. Funciones cuadráticas

Se llaman **funciones cuadráticas** a aquéllas en las que la variable independiente, es decir, la x aparece elevada al cuadrado.

Al representar gráficamente una función cuadrática se obtiene siempre una curva que se llama **parábola.**

Se llama **eje de simetría** de la parábola a la recta por la cual se puede doblar la parábola de forma que las dos partes coincidan

Se llama **vértice** de la parábola al punto donde la parábola presenta un máximo o un mínimo

Intersección de la parábola con los ejes

- **Intersección con el eje OY:** Como todos los puntos de este eje tienen la abscisa x = 0, el punto de corte de la parábola con el eje OY tendrá de coordenadas **(0,c)**

- **Intersección con el eje OX:** Como todos los puntos del eje OX tienen la ordenada y = 0, para ver estos puntos de corte se resuelve la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Dependiendo del valor del **discriminante (D)** de la ecuación, se pueden presentar tres situaciones distintas:

1. Si **D > 0**, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas y **la parábola cortará al eje OX en dos puntos**.
2. Si **D = 0**, la ecuación tiene una solución real y, por tanto, **la parábola cortará al eje OX en un punto** (que será el vértice).
3. Si **D < 0**, la ecuación no tiene soluciones reales y**la parábola no cortará al eje OX**.

Se llama **eje de simetría** de la parábola a la recta por la cual se puede doblar la parábola de forma que las dos partes coincidan . Se calcula:

$$\boxed{x = \frac{-b}{2a}}$$

Se llama **vértice** de la parábola al punto donde la parábola presenta un máximo o un mínimo

El vértice de una parábola está situado en el eje de ésta y, por tanto, su abscisa será el punto medio de las abscisas de dos puntos de la parábola que sean simétricos.
Como toda función cuadrática pasa por el punto (0,c) y el simétrico de éste tiene de abscisa x = -b/a, la del vértice será Xv = -b/2a. La ordenada Yv se calcula sustituyendo el valor de Xv en la ecuación de la función.

13. Representa gráficamente la función $y = x^2$

a) Completa esta tabla de valores:

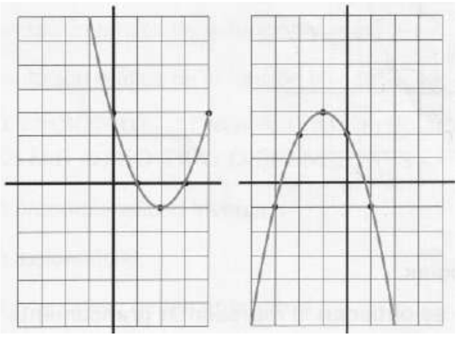
x	3	2	1	0	-1	-2	-3
y							

b) Representa en una gráfica los puntos obtenidos.

14. Observa la parábola $y = x^2$.

a) ¿En qué intervalo es creciente y en qué intervalo decreciente?

b) En el punto (0,0) la parábola, ¿es creciente o decreciente?
c) ¿Presenta algún máximo o algún mínimo esta parábola?



15. A continuación tienes una serie de parábolas.

a) Señala en cada una el eje de simetría.
b) Di en qué punto tiene cada una el vértice.

16. Vamos a ver cómo es la gráfica de las funciones y = ax² cuando a es un número positivo.

a) Vuelve a representar gráficamente la función $y = x^2$.
b) En la misma gráfica representa la función $y = 2x^2$
Para ello completa esta tabla de valores:

x	2	1	0	-1	-2	1/2	-1/2
y						2/4	

c) También en la misma gráfica representa la función $y = \frac{1}{2}x^2$. Para ello completa esta tabla de valores:

x	2	1	0	-1	-2	-3
y	2				9/2	

RECUERDA que para hallar el valor numérico de un polinomio de tipo ax^2 primero se sustituye el valor de la **x** por el número y se eleva éste al cuadrado, y luego se multiplica el resultado obtenido por **a**.

d) ¿Cuál es el eje de simetría de esta tres parábola?
e) ¿Dónde tienen el vértice cada una de estas parábolas?
f) ¿Cuál de ellas es más abierta y cuál más cerrada?

17. Vamos a ver cómo es la gráfica de las funciones y = ax² cuando a es un número negativo.

a) Representa gráficamente la función $y = -x^2$.
Para ello completa esta tabla de valores:

x	2	1	0	-1	-2	3	-3
y	-4						

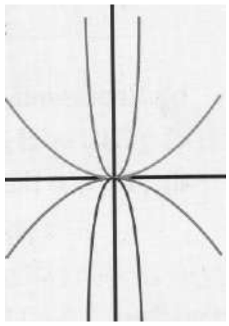
FÍJATE que en la función $y = -x^2$ el cuadrado sólo afecta a la **x** pero no al signo menos.

b) En la misma gráfica, representa las funciones y -2x² e $y = \frac{1}{2}x^2$. Para ello realiza una tabla de valores semejante a las anteriores.
c) ¿Cuál es el eje de simetría de estas tres parábolas?
d) ¿Dónde tienen el vértice cada una de estas parábolas?
e) ¿Cuál de ellas es más abierta y cuál más cerrada?
f) ¿Hacia dónde están abiertas estas parábolas, hacia arriba o hacia abajo?

Características de las las parábolas de ecuación y = ax²

- ✓ Tienen por eje de simetría el eje de ordenadas.
- ✓ Tienen el vértice en el origen de coordenadas, es decir, en el punto (0,0).
- ✓ Están abiertas hacia arriba si a es positiva y hacia abajo si a es negativa.
- ✓ Son más cerradas cuanto mayor es el valor absoluto de a.

18. **En esta gráfica están representadas las funciones:**



a) $y = -3x^2$.
b) $y = 4x^2$.
c) $y = -\frac{1}{3}x^2$
d) $y = \frac{1}{3}x^2$
¿Sabrías decir qué gráfica le corresponde a cada función?

19. **Sabemos que la gráfica de la función $y = ax^2$ pasa por el punto (2,12), es decir, que cuando $x = 2$, entonces $y = 12$. Halla el valor de a.**

20. **Halla el vértice y la ecuación del eje de simetría de las siguientes parábolas:**

Posteriormente dibuja sus graficas.

$y= (x-1)^2 + 1$	$y= 3(x-1)^2 + 1$	$y= 2(x+1)^2 - 3$
$y= -3(x - 2)^2 - 5$	$y = x^2 - 7x -18$	$y = 3x^2 + 12x - 5$

21. **Indica, sin dibujarlas, en cuantos puntos cortan al eje de abscisas las siguientes parábolas:**

$y = x^2 - 5x + 3$	$y = 2x^2 - 5x + 4$
$y = x^2 - 2x + 4$	$y = -x^2 - x + 3$

22. **Representa gráficamente las funciones cuadráticas anteriores y las que se indican a continuación:**

$y = -x^2 + 4x - 3$ $\qquad$ $y = x^2 + 2x +1$

23. **Indica la expresión analítica de una función cuadrática que: tenga mínimo en el punto x= -2 y corte al eje Y en (0,-1).**

24. **Indica la expresión analítica de una función cuadrática con máximo en (5,4).**

25. **Indica la expresión analítica de una función cuadrática que tenga como puntos de corte con el eje horizontal los valores x=3 y x=-2 y como vértice un máxim0.**

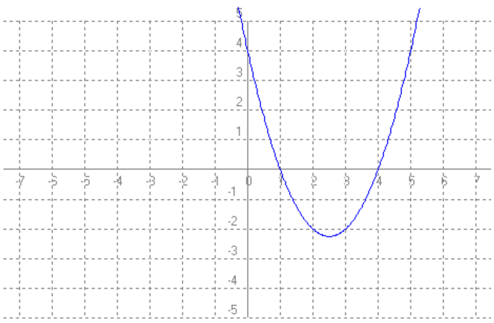
26. **Expresión algebraica de una función cuadrática que…**

a) Pase por los puntos (1,1), (0,2) y (3,-3).
b) Qué se corte con la recta y=3x-3 en los puntos de coordenadas (0,-3) y (2,3).

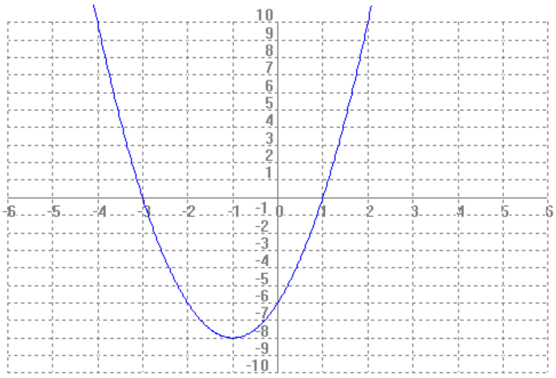
27. **Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $y = x^2 + ax + a$ y pasa por el punto (1,9). Calcular el valor de a.**

28. **Se sabe que la función cuadrática de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (1,1), (0, 0) y (-1,1). Calcula a, b y c**

29. **Expresión algebraica de la función**



30. **Determina la expresión algebraica de la función f(x) aquí representada.**



31. **Dibuja en estos mismos ejes la gráfica de $g(x) = -x+1$**

32. **Dibuja en estos mismos ejes la gráfica de $h(x) = x^2+3x$**

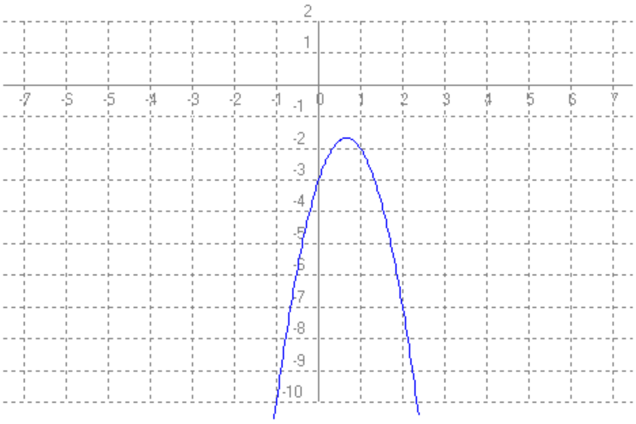
33. **Obtén gráficamente la solución de las siguientes ecuaciones**

$f(x) = g(x)$

$|f(x)|=|h(x)|$

$f(x) = h(x)$

34. **¿Cuál es la expresión analítica de esta función?**



35. **La parábola que representa a la función $y = -x^2 + bx + c$, tiene el vértice sobre el eje OX, en el punto (3,0). Hallar la función.**

36. **¿Por qué la parábola $y = x^2 - 3x + 4$ no corta al eje X?**

37. **Representa la siguiente parábola $y = -2x^2 - x + 3$**

UNIDAD DIDÁCTICA 5
ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

1. Comprensión de la estructura de una bases de datos

Hoy en día se recogen datos diversos para el análisis de muchas aspectos. Pero estos datos hay que organizarlos; esto se hace por medio de unos programas informáticos específicos que se llaman **bases de datos.**

La forma de organización de la información en una base de datos se basa en **tablas**, formadas por:

- **Registros**: cada una de las filas de la tabla es un registro de datos individual.
- **Campos**: en las distintas columnas de cada fila

Entre los programas que existen en el mercado para gestionar bases de datos, podemos citar **Openoffice Base**, del paquete de software libre Openoffice, y **Microsoft Access**, del paquete comercial Microsoft Office.

1.1. Protección de datos

La proliferación de la recogida de datos con fines comerciales obligó a regularizarlos, a través de la Ley Orgánica 15/1999, de 13 de diciembre, de **Protección de Datos de Carácter Personal**, desarrollada en el Real Decreto 1720/2007, de 21 de diciembre.

1. ¿Cómo podemos definir una base de datos?

a) Un conjunto de datos almacenados.
b) Una recopilación de informaciones interesantes.
c) Un almacén de datos almacenados y ordenados según conceptos.
d) El conjunto de conceptos en los que se basa el ordenamiento de datos.

2. Un registro de la base de datos es:

a) Cada una de las distintas informaciones almacenadas y ordenadas en filas y columnas.
b) Un conjunto individual de datos, relacionados entre sí.
c) La información del mismo tipo que se relaciona.
d) Un gran conjunto de datos almacenados y ordenados.

3. En una tabla de una base de datos, un campo es:

a) Cada una de las columnas.
b) Cada una de las filas.
c) Fila o columna según sea el diseño de la base.
d) Cada una de los registros individuales.

4. ¿Cómo nos protege la Ley Orgánica de Protección de Datos de Carácter Personal?

a) Establecer las cláusulas con las que se van a proteger los datos, y publicarlas.
b) Adoptar medidas de seguridad para proteger la base de datos.
c) Elaborar un documento sobre esas medidas de seguridad.
d) Mediante todas las acciones anteriores.

2. Necesidad de la estadística para comprender los datos

La **estadística** es la parte de las matemáticas que se ocupa de recoger y ordenar datos referidos a fenómenos para su posterior análisis e interpretación.

2.1. Población y muestra

Población: conjunto de todos los elementos que son objeto de estudio.

Muestra: parte de la población que vamos a estudiar, y del estudio de la misma sacaremos conclusiones aplicables al total de la población.

2.2. Identificación de variables

Cuando hacemos un estudio estadístico nos preguntamos cuál es la característica motivo de estudio. A ella se la llama **variable estadística o carácter estadístico**.

Las variables estadísticas pueden ser:

- ✓ **Cuantitativas**: cuando los datos son números. Dentro de estas podemos diferenciar dos tipos:
  - **Discretas**: las que toman valores enteros.
  - **Continuas**: las que pueden tomar valores decimales.
- ✓ **Cualitativas**: cuando los datos no son números, sino cualidades.

5. En una población se realiza un estudio sobre distintos aspectos de sus individuos. Indica cuáles de las siguientes variables son cualitativas y cuales cuantitativas.

a. Deporte practicado.
b. Sexo.
c. Color de ojos.
d. Número de hermanos.
e. Estatura.
f. Música favorita.
g. Horas diarias de sueño.

6. En una empresa se hace un estudio sobre el tiempo que emplean los trabajadores en el descanso de media mañana. Entre los 200 trabajadores de la empresa se pregunta a 30 de ellos. ¿Cuáles son la población y la muestra? ¿Cuál es la variable estadística? ¿Es cualitativa o cuantitativa?

7. Un fabricante de tornillos desea hacer un control de calidad. Para ello recoge uno de cada 100 tornillos y lo analiza para saber si son correctos o no. ¿Cuáles son la población y la muestra? Indica cuál es la variable y si es cualitativa o cuantitativa.

8. Se ha preguntado a 50 familias de una localidad el número de vehículos por vivienda. Completa las siguientes frases:

La ____________ objeto de estudio son las familias de la localidad. La ____________ son las 50 familias a las que se les ha tomado el dato sobre el número de vehículos que poseen. La variable "número de vehículos es ____________ ya que toma valores numéricos.

3. Elección de muestras significativas. Recuento de datos y frecuencias

Para que el resultado de un estudio estadístico sea eficaz y válido, el tamaño de la muestra debe ser adecuado o **representativo** del total de la población.

3.1. Muestras: características y tipos

El **tamaño de la muestra** es el número de elementos que tiene.

Para que la muestra sea **representativa** se deben tener en cuenta las siguientes características:

- ✓ Aleatoriedad: cualquier elemento puede ser elegido.
- ✓ Homogeneidad: los elementos de la población deben tener condiciones similares.
- ✓ Tamaño de la muestra: debe ser ajustado al riesgo de error que se pretende.

Tipos de muestra:

a. **Aleatoria:** cuando se extraen al azar del total de la población.

b. **Sistemática:** cuando se extraen los datos según una secuencia.

c. **Estratificada**: cuando se divide la población en partes homogéneas

3.2. Recuento de datos y frecuencias

Una vez confeccionada y realizada la encuesta, es necesario organizar los datos y realizar el recuento. Para ello elaboramos una tabla en la que se recogen los diferentes resultados con sus frecuencias.

La **frecuencia absoluta** de un dato es el número de veces que se repite.

La **frecuencia relativa** de un dato es el número de veces que se repite dividido entre el número total de datos (tamaño de la muestra).

La **frecuencia absoluta acumulada** de un dato es el número de datos que toman un valor inferior o igual a dicho dato.

Una observación importante: si la frecuencia relativa la multiplicamos por cien, obtenemos los **porcentajes**.

9. Indica la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a. El error que se comete al realizar un estudio estadístico no es predecible.
b. Cuando realizamos una encuesta el tamaño de la muestra son los individuos a los que se les pregunta.
c. La frecuencia absoluta de un dato nos indica el número de veces que se repite.
d. La frecuencia relativa multiplicada por 100 nos da el porcentaje del dato correspondiente sobre el total de datos.

10. Indica en los siguientes casos qué tipo de muestra son más apropiados: aleatoria, sistemática o estratificada.

a. Estatura de los individuos adultos y varones de una población.
b. Estudio de piezas defectuosas en un proceso de fabricación.
c. Gasto en ropa de la población española.
d. Tiempo que dedican los trabajadores de una empresa en el descanso de media mañana.

11. Completa el texto colocando las palabras siguientes en el lugar adecuado:

Una ____________ será representativa de una ____________ cuando es aleatoria y homogénea. El ____________ de la muestra debe ajustarse para que el error no exceda la cantidad prefijada. Las muestras en las que se extraen los datos al azar del total de la población se llaman ____________ . Las muestras en las que se extraen los datos según una secuencia estipulada previamente se

llaman______________ . Cuando se divide la población en partes homogéneas y se extraen datos de cada parte se dice que usamos una muestra ______________ .
Banco de palabras: aleatorias, estratificada, muestra, población, sistemáticas, tamaño

12. **En un estudio estadístico sobre el tipo de deporte practicado por los jóvenes de entre 15 y 20 años en una localidad, hemos observado que entre los encuestados hay 36 jóvenes que practican atletismo y a los que les corresponde una frecuencia relativa del 0,12. ¿Cuál es el tamaño de la muestra a la que se le ha hecho el estudio?**

13. **Lanzamos un dado 25 veces y los resultados obtenidos son: 2, 3, 5, 1, 2, 3, 6, 6, 4, 5, 3, 5, 2, 6, 4, 1, 3, 2, 4, 6, 3, 2, 1, 4, 6. Realiza el recuento y completa la tabla de frecuencias:**

Variable	Recuento	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia absoluta acumulada F_i	Frecuencia relativa h_i	Porcentaje p_i
1					
2			8		
3		5			
4	////				
5					12%
6				5/25 = 0,2	
		SUMA = 25		SUMA = 1	SUMA = 100

14. **Completa los datos que faltan en la siguiente tabla referente al lanzamiento de un dado de cuatro caras numeradas del 1 al 4:**

Variable	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Porcentaje (%)
1	///				%
2	//////		9		30%
3	///////			0,35	%
4	////	4			%

3.3. Agrupamiento de datos por intervalos

Cuando en una variable estadística tenemos muchos datos diferentes, lo apropiado es recoger los datos agrupados por intervalos que se llaman **intervalos de clase**.

Antes de continuar, debemos repasar los distintos **tipos de intervalos**:

- ✓ **(a,b):** números comprendidos entre a y b, **excluidos** ambos extremos.
- ✓ **[a,b)**: números comprendidos entre a y b, incluido a y excluido b.
- ✓ **(a,b]**: números comprendidos entre a y b, excluido a e incluido b.
- ✓ **[a,b]**: números comprendidos entre a y b, **incluidos** ambos extremos.

El valor medio del intervalo se denomina **marca de clase**. La marca de clase se puede calcular dividiendo la suma de los dos extremos entre 2.

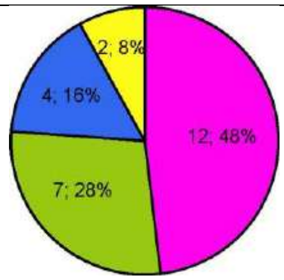
La **amplitud del intervalo** es la diferencia de los dos extremos. Todos los intervalos de clase deben tener la misma amplitud.

4. Elaboración de gráficos estadísticos

Diagramas de barras

Histogramas

Polígonos de frecuencias



Diagramas de sectores

15. **Indica el tipo de variable: discreta, continua, cuantitativa o cualitativa. ¿En qué casos se recogerían los datos agrupados en intervalos?**

a. Libros de lectura favoritos.
b. Número de libros leídos en el último año.
c. Precio de un alimento.
d. Nivel de contaminación.
e. Calificación en un test de 100 preguntas.
f. Peso de un recién nacido.

16. **En una encuesta realizada a 25 personas se ha tomado el dato referido al número de libros leídos en el último año: 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3 3. Elabora una tabla de frecuencias.**

Nº libros	Frecuencia absoluta (f_i)	Frecuencia relativa (h_i)	Frecuencia absoluta acumulada (F_i)
0			
1			
2			
3			

17. **Un test psicotécnico de 100 preguntas ha sido realizado por 50 personas y las puntuaciones han sido las siguientes: 1, 3, 7, 15, 19, 20, 25, 25, 28, 28, 28, 30, 31, 33, 35, 35, 37, 38, 40, 40, 40, 44, 45, 45, 45, 45, 48, 48, 48, 49, 49, 50, 50, 50, 56, 57, 59,59, 60, 60, 60, 65, 67, 70, 74, 76, 76, 79, 90, 95. Elabora una tabla de frecuencias en la que los datos estén agrupados en intervalos de amplitud 20.**

Intervalo	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta acumulada
[0,20)				

[20,40)				18
[40,60)			20/50 = 0,40	
[60,80)	70			
[80,100]		2		

18. Señala cuáles de las siguientes variables son discretas y cuáles continuas:

a) Calificaciones de un grupo de alumnos en una asignatura.
b) La temperatura de distintas localidades a las 12 del mediodía.
c) La altura de una persona.
d) El peso de un jamón ibérico.
e) El precio del recibo de la luz de los usuarios de una compañía.
f) El número de llamadas telefónicas a cierto teléfono a lo largo de un día.

19. Indica en cada caso si debemos recoger los datos por intervalos:

a) El peso de un jamón.
b) Operaciones realizadas en un hospital a lo largo de un mes.
c) Número de miembros por familia.
d) Ingresos diarios en un supermercado.

20. Completa los datos que faltan en la siguiente tabla referente a las pulsaciones de un equipo de atletas al terminar una carrera. Expresa las frecuencias relativas en forma decimal.

Pulsaciones	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta acumulada
[70,80)		5		
[80,90)			0,40	13
[90,100)				19
[100,110)				20

21. En una población se ha tomado una muestra de 25 familias a las que se les ha preguntado sobre el número de vehículos que poseen. Los datos se recogen en la siguiente tabla. Haz una representación de las frecuencias en un diagrama de barras, un polígono de frecuencias y un gráfico de sectores.

Nº de coches	Nº de familias
0	2
1	12
2	7
3	3
4	1

22. La tabla siguiente muestra el número de empleados de una empresa, cuyos sueldos expresados en euros, están agrupados en intervalos. Haz una representación de las frecuencias en un histograma y otra en un gráfico de sectores donde se refleje el porcentaje.

Sueldos	Nº de empleados
[500, 600)	8
[600, 700)	10
[700, 800)	16
[800, 900)	14
[900, 1.000)	10
[1.000, 1.100)	5
[1.100, 1.200]	2

23. Se han obtenido las pulsaciones de un equipo de atletas después de una carrera. Se reflejan en la siguiente tabla. Contesta a las siguientes preguntas:

Pulsaciones	Nº de atletas
[70, 74)	3

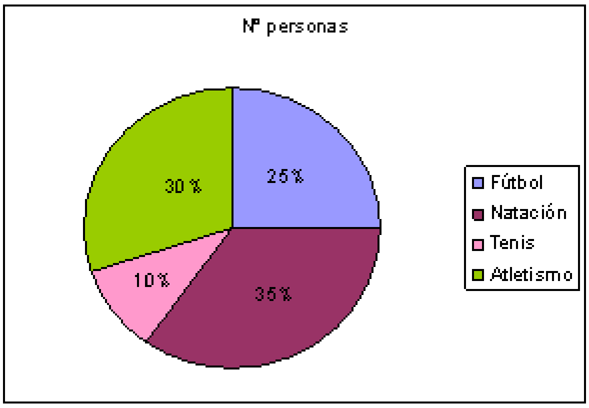
[74, 78)	5
[78, 82)	7
[82, 86)	10
[86, 90)	12
[90, 94]	8

a. ¿Cuántos elementos forman la muestra?
b. ¿De qué tipo es la variable estadística?
c. Construye la tabla de frecuencias.
d. Dibuja el histograma.
e. Dibuja el polígono de frecuencias acumuladas.

24. **Si en el diagrama de sectores el ángulo correspondiente a una característica es de 72º y el tamaño de la muestra es 40, ¿cuál es la frecuencia relativa?**

a) 8,0.
b) 0,5
c) 0,2
d) 1,0

25. **Se ha hecho un estudio en un grupo de personas sobre el deporte más practicado. Indica qué tabla corresponde al siguiente gráfico.**



a)

Deporte	Nº personas
Fútbol	5
Natación	7
Tenis	3
Atletismo	5

c)

Deporte	Nº personas
Fútbol	5
Natación	7
Tenis	2
Atletismo	6

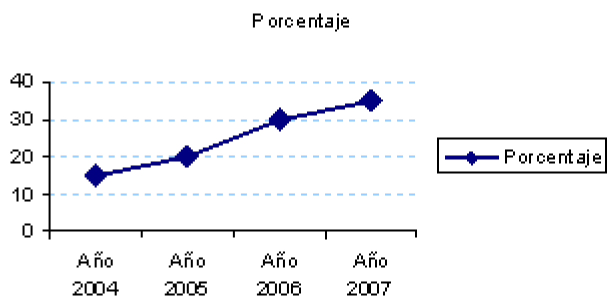
b)

Deporte	Nº personas
Fútbol	4
Natación	8
Tenis	3
Atletismo	5

d)

Deporte	Nº personas
Fútbol	5
Natación	5
Tenis	4
Atletismo	6

26. **Indica qué tabla corresponde al siguiente gráfico de la evolución de las ventas (en porcentaje) de un producto a lo largo de cinco años.**



a)

Año	Porcentaje
2004	20
2005	25
2006	30
2007	25

b)

Año	Porcentaje
2004	15
2005	25
2006	27
2007	33

c)

Año	Porcentaje
2004	15
2005	20
2006	30
2007	35

d)

Año	Porcentaje
2004	15
2005	20
2006	25
2007	40

27. **Indica qué tipo de gráfico (histograma, diagrama de barras o polígono de frecuencias) es el más adecuado para representar las siguientes variables:**

a) Peso.

b) Talla de camisa
c) Campos aprobados por un grupo de alumnos.
d) Producción de aceite en Extremadura a lo largo de los últimos cinco años.

5. Cálculo de las medidas de centralización

Debemos seguir estos pasos:

1. º Hacer una tabla de frecuencias en la que recojamos los datos:

- ✓ **Variable**
- ✓ **Frecuencia absoluta** (número de veces que aparece cada variable)
- ✓ **Frecuencia acumulada** (suma de las frecuencias anteriores a cada caso)
- ✓ **Frecuencia relativa** (cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de elementos)
- ✓ **Porcentaje** (multiplicamos la frecuencia relativa por 100 y lo expresamos en %)

(estas dos últimas –frecuencia relativa y porcentaje- no son necesarias para el cálculo de las medidas estadísticas)

Si viene dado por intervalos [a, b), además hay que incluir la MARCA DE CLASE (se suman los dos números del intervalo y se divide el resultado por 2) Marca = (a+b)/2

Ejemplo 1. Realizada una encuesta a 30 niños de una clase de cuántos libros leen en un año, obtenemos los datos 1, 2, 2, 3, 2, 1, 0, 2, 3, 4, 0, 5, 1, 2, 0, 1, 0, 3, 6, 7, 0, 2, 7, 6, 1, 2, 2, 3, 5, 0. Construye una tabla para ordenar estos datos.

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Porcentaje
0	6	6	6/30 = 0,2	20 %
1	5	11 *(6+5)*	5/30 = 0,17	17 %
2	8	19 *(11+8)*	8/30 = 0,27	27 %
3	4	23	4/30 = 0,13	13 %
4	1	24	1/30 =0,03	3 %
5	2	26	2/30 = 0,07	7 %
6	2	28	2/30 = 0,07	7 %
7	2	30	2/30 = 0,07	7 %
	SUMA = 30		*SUMA = 1*	*SUMA ≈ 100*

Moda

Es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia.

En el **Ejemplo 1 la moda es 2** (tiene la mayor frecuencia absoluta: 8)

Mediana

Sólo sirve para variables cuantitativas. Nos tenemos que fijar en la casilla de frecuencias acumuladas.

Dividimos por 2 el número de resultados: 30 / 2 = 15

La casilla de las frecuencias acumuladas que se corresponde con este número o con el número inmediato superior es donde debemos buscar la variable que nos indica la mediana.

En el **Ejemplo 1** sería la casilla de la frecuencia acumulada 19 y la variable, es decir, la **mediana es 2.**

Media

Es la suma de todos los datos dividido entre el número total de datos.

Para calcularla hay que hacer una nueva columna: datos·frecuencia

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Datos·frecuencia
0	6	6	6 X 0 = 0
1	5	11 *(6+5)*	5 x 1 = 5
2	8	19 *(11+8)*	8 X 2 = 16
3	4	23	4 X 3 = 12
4	1	24	1 X 4 = 4
5	2	26	2 X 5 = 10
6	2	28	2 X 6 = 12
7	2	30	2 X 7 = 14
	SUMA = 30		SUMA = 73

En el **Ejemplo 1 la media** será 73 / 30 = **2, 43**

Cuando los datos están agrupados en intervalos, se utiliza la marca de clase para calcular estas medidas.

Ejemplo 2. Preguntamos a 19 niños de una clase cuál es su paga semanal, y nos contestan lo siguiente:

(de 0 a 10) 2
(de 10 a 20) 3
(de 20 a 30) 5
(de 30 a 40) 8
(de 40 a 50) 1

Realiza una tabla de frecuencias y calcula la media, la mediana y la moda

Variable (paga semanal)	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Marca X frecuencia
de 0 a 10	5 (10+0/2=5)	2	2	5 X 2 = 10
de 10 a 20	15 (20+10/2=15)	3	5	15 X 3 = 45
de 20 a 30	25	5	10	25 X 5 = 125
de 30 a 40	35	8	18	35 X 8 = 280
de 40 a 50	45	1	19	45 X 1 = 45
		SUMA = 19		SUMA = 505

Moda = de 30 a 40 (la mayor frecuencia es 8)

Mediana = de 20 a 30 (19/2 =9,5 Frecuencia acumulada 10)

Media = 27 (505 / 19= 26,57)

27 bis. Halla la media, la mediana y la moda en la siguiente distribución: 7, 9, 2, 9, 10, 4, 5, 4, 4

28. **Halla la mediana en la siguiente distribución: 7, 9, 2, 9, 10, 4, 5, 4, 4, 6.**

29. **El número de horas de estudio semanal que dedican 20 estudiantes al campo Científico-Tecnológico es: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8.**

Elabora una tabla de frecuencias absolutas.
Calcula la moda.
Calcula la mediana.
Calcula la media.

30. **En una línea de autobús se quiere controlar la afluencia de usuarios a lo largo de la semana. Todos los días se hace recuento de los usuarios del autobús y se refleja en la siguiente tabla.**

Variable (x_i)	Frecuencia
Lunes	380
Martes	390
Miércoles	320
Jueves	250
Viernes	200
Sábado	180
Domingo	60

a) Calcula la moda.
b) Elabora una tabla de frecuencias acumuladas.
c) ¿Cuántas personas han subido al autobús a lo largo de la semana?
d) ¿Cuántas personas han subido al autobús a lo largo de los tres primeros díasde la semana?
e) Calcula la mediana.
f) Calcula la media.

31. **Se ha preguntado a un grupo de escolares de entre 10 y 12 años sobre el tiempo que dedican a la lectura a lo largo de la semana. Los resultados están expresados en la siguiente tabla:**

Tiempo (horas)	Nº de escolares
[0, 2)	6
[2,4)	11
[4,6)	8
[6,8)	3
[8,10]	2

a) Elabora una tabla de frecuencias.
b) Halla la moda, la mediana y la media.

32. **Calcula la moda de la siguiente distribución:**

x_i	5	10	15	20	25	30	35	40	45
f_i	0	0	0	2	11	2	0	0	0

33. **El ayuntamiento de una ciudad está interesado en saber el número de ocupantes de los turismos que circulan por las calles. Para ello se elige un semáforo y se cuenta el número de ocupantes de los 100 primeros vehículos que paran en él. ¿Cuál es la media, la mediana y la moda si los datos obtenidos son los siguientes?**

Nº Ocupantes	Nº de vehículos (f_i)
1	35
2	29
3	21
4	9
5	6

34. **Las estaturas de 75 personas están recogidas en la siguiente tabla. Calcula el intervalo modal y el intervalo mediano:**

Intervalo	**fi**
[140,146)	2
[146,152)	6
[152,158).	10
[158,164)	15
[164,170)	25
[170,176)	8
[176,182)	5
[182,188)	4

35. **El número de personas que vive en cada uno de los edificios de una barriada se recoge en la siguiente tabla. Calcula la media, la mediana y la moda:**

Nº de personas	Nº de edificios (fi)
[60,76)	6
[76,92)	8
[92,108)	50
[108,124)	45
[124,140)	31
[140,156)	10

6. Cálculo de las medidas de dispersión

▶ Rango o recorrido

Es la diferencia entre el valor mayor y el valor menor.

En el **Ejemplo 1**: Valor mayor (7) – valor menor (0) = **7**

En el **Ejemplo 2**: Valor mayor (50) **–** valor menor (0) = **50**

▶ Desviación media

Consiste en realizar la media aritmética de las desviaciones de cada dato respecto al valor central media aritmética. (para ello debemos haber calculado antes esta media)

1 º. A los datos de la variable le **restamos el valor de la media** y expresamos su **valor absoluto** (sin el signo)

2.º Multiplicamos cada dato obtenido en el paso anterior **por la frecuencia absoluta**.

3.º Sumamos todos los valores de la desviación y **lo dividimos entre el número total de datos**

▶ Varianza

Es la **media de los cuadrados de las desviaciones** respecto de la media.

▶ Desviación típica

Es la **raíz cuadrada** de la varianza.

► Coeficiente de variación

Es la **desviación típica dividida entre la media**.

Cuanto menor sea el coeficiente de variación, más homogénea es la distribución de los datos.

El coeficiente de variación no tiene unidades y se suele expresar en porcentaje.

EJEMPLO 1 COMPLETO

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Datos · frecuencia	Desviación= /Datos-Media/ (sin el signo)	Desviación· · Frecuencia	Varianza: (desv.)^2 · frecuencia
0	6	6	6 X 0 = 0	0 - 2,4 = - 2,4 = 2,4	2,4 x 6 = 14,4	$(2,4)^2$ x 6 = 5,76 x 6 =34,56
1	5	11	5 x 1 = 5	1 – 2,4 = -1,4 = 1,4	1,4 x 5 = 7	$(1,4)^2$ x 5= 1,96 x 5 = 9,8
2	8	19	8 X 2=16	2 – 2,4 = - 0,4 = 0,4	0,4 x 8 = 3,2	$(0,4)^2$ x 8 = 0,16 x 8 = 1,28
3	4	23	4 X 3=12	3 – 2,4 = 0,6	0,6 x 4 = 2,4	$(0,6)^2$ x 4 = 0,36 x 4 = 1,44
4	1	24	1 X 4 = 4	4 – 2,4 = 1,6	1,6 x 1 = 1,6	$(1,6)^2$ x 1 = 2,56
5	2	26	2 X 5 = 10	5 – 2,4 = 2,6	2,6 x 2 = 5,2	$(2,6)^2$ x 2 = 6,76 x 2 = 13,52
6	2	28	2 X 6 =12	6 – 2,4 = 3,6	3,6 x 2 = 7,2	$(3,6)^2$ x 2 = 12,96 x 2 = 25,92
7	2	30	2 X 7 =14	7 – 2,4 = 4,6	4,6 x 2 = 9,2	$(4,6)^2$ x 2 = 21,16 x 2 = 42,32
SUMA	**30**		**73**		**50,2**	**131,4**

- **Moda es 2** (la mayor frecuencia es 8)
- **Mediana es 2** (20/2=15)
- **Media** 73 / 30 **= 2, 43**
- **Rango o recorrido:** Valor mayor (7) – valor menor (0) = **7**
- **Desviación media** = 50.2 / 30 **= 1,67**
- **Varianza =** 131,4 / 30 **= 4,38**
- **Desviación típica** = √ Varianza = √4,38 **= 2,09**
- **Coeficiente de variación** = Desviación típica / media = 2,09 / 2,43 = 0, 86 **= 86 %**

EJEMPLO 2 COMPLETO

Variable (paga)	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Marca x frecuencia	Desviación /Marca de clase-Media/ (sin el signo)	Desviación x Frecuencia	Varianza (desv.)^2 x frec absoluta
0 a 10	5 (10+0/2 =5)	2	2	5 X 2 = 10	5 - 27 = 22	22 x 2 = 44	22^2 x 2 = 968
10 a 20	15	3	5	15 X 3 = 45	15 - 27= 12	12 X 3 = 36	12^2 x 3 = 432
20 a 30	25	5	10	25 X 5 = 125	25 - 27 = 2	2 X 5 = 10	2^2 x 5 = 20
30 a 40	35	8	18	35 X 8 = 280	35 - 27 = 8	8 X 8 = 64	8^2 x 8 = 512
40 a 50	45	1	19	45 X 1 = 45	45 - 27 = 18	18 X1 = 18	18^2 x 1 = 324
		SUMA = 19		**SUMA = 505**		**SUMA = 172**	**SUMA: 2274**

- **Moda = de 30 a 40** (la mayor frecuencia es 8)
- **Mediana = de 20 a 30** (19/2 =9,5 Frecuencia acumulada 10)
- **Media = 27** (505 / 19= 26,57)
- **Rango o recorrido;** Valor mayor (50) – valor menor (0) **= 50**
- **Desviación media** = 172 / 19 **= 9**
- **Varianza** = 2274 / 19 **= 119,68**
- **Desviación típica** = √ Varianza = **√119,68 = 10,93**
- **Coeficiente de variación** = Desviación típica / media = **10,93** / 27 = 0, 40 **= 40 %**

36. El número de horas de estudio semanal que dedican 20 estudiantes al campo Científico-Tecnológico es: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8. Calcula el rango, la varianza y la desviación típica.

37. Un test psicotécnico de 100 preguntas ha sido realizado por 50 personas y las puntuaciones han sido las siguientes: 1, 3, 7, 15, 19, 20, 25, 25, 28, 28, 28, 30, 31, 33, 35, 35, 37, 38, 40, 40, 40, 44, 45, 45, 45, 45, 48, 48, 48, 49, 49, 50, 50, 50, 56, 57, 59,59, 60, 60, 60, 65, 67, 70, 74, 76, 76, 79, 90, 95.

a) Elabora una tabla de frecuencias en la cual los datos estén agrupados en intervalos de amplitud 20.
b) Calcula la media.
c) Calcula la varianza y la desviación típica.

38. Los sueldos en dos empresas de las mismas características vienen reflejados en las siguientes tablas:

Intervalo (EMPRESA A)	**Marca de clase**	**Frecuencia absoluta x_i**
[500,1000)	750	5
[1000,1500)	1.250	13
[1500,2000)	1.750	18
[2000,2500)	2.250	12
[2500,3000]	2.750	2

Intervalo (EMPRESA B)	**Marca de clase**	**Frecuencia absoluta x_i**
[500,1000)	750	1
[1000,1500)	1.250	15
[1500,2000)	1.750	20
[2000,2500)	2.250	13
[2500,3000]	2.750	1

a) Calcula la varianza y la desviación típica de la empresa A.
b) Calcula la varianza y la desviación típica para la empresa B.
c) ¿Qué empresa tiene los precios más homogéneos?

39. A continuación se indican las calificaciones en dos grupos de alumnos. Grupo A: 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 10. Grupo B: 3, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 8.

a) Calcula las notas medias.
b) Calcula la desviación típica de cada grupo.
c) Calcula el coeficiente de variación de ambos grupos y compáralos.

40. **Un empresario desea conocer en cuál de sus dos fábricas se rinde más. Para ello, calcula el número de horas perdidas por trabajador y semana en cada una de las fábricas y resulta ser una media de 2,5 horas semanales en la primera fábrica (A) y de 3 horas semanales en la segunda (B). Las desviaciones típicas son 1,45 horas en la primera fábrica y 1,2 horas en la segunda.**

a) ¿Cuál es el coeficiente de variación en ambos casos?
b) ¿Cuál de las dos fábricas es la más homogénea o menos dispersa?
c) ¿Es representativa la media?

41. **Los siguientes datos son el tiempo de duración en segundos de 50 conversaciones telefónicas: 125, 65, 80, 97, 325, 400, 98, 74, 90, 120, 240, 85, 370, 135, 78, 326, 282, 145, 192, 64, 108, 324, 207, 183, 94, 62, 315, 217, 192, 106, 78, 89, 207, 70, 69, 402, 68, 108, 361, 304, 273, 181, 91, 107, 404, 315, 125, 106, 176, 207. ¿Cuál es el rango?**

a) 342
b) 82
c) 50
d) 25

42. **El precio de un mismo frigorífico en varios comercios es el siguiente: 800 €; 850 €; 780 €; 830 € y 900 €. Calcula la desviación media de los precios:**

a) 41,67
b) 1736,39
c) 46,58
d) 34,4

43. **El precio de un mismo frigorífico en varios comercios es el siguiente: 800 €; 850 €; 780 €; 830 € y 900 €. Calcula la desviación típica de los precios:**

a) 41,67
b) 1736,39
c) 46,58
d) 34,4

44. **En un almacén de fruta hay dos clases de naranjas; tomamos dos muestras: las de tipo A tienen un peso medio de 200 gramos y una desviación típica = 30 gramos ; las de tipo B tienen un peso medio de 180 gramos y una desviación típica = 25 gramos . Compara ambos grupos y elige la respuesta correcta:**

a) Los pesos de las naranjas del tipo A son más homogéneos, ya que el coeficiente de variación es menor.
b) Los pesos de las naranjas del tipo B son más homogéneos, ya que el coeficiente de variación es menor que el de las de tipo A.
c) Los dos tipos de naranjas tienen el mismo coeficiente de variación.
d) No se pueden comparar porque la media es diferente.

45. **Para conocer las edades de los empleados de una fábrica se toma la siguiente muestra de 60 empleados, que se agrupan en intervalos de 4 años de edad.:**

Intervalos	fi
[18,22)	2
[22,26)	14
[26,30)	12
[30,34)	12
[34,38)	14
[38,42]	6

a) Calcula la desviación media
b) Calcula la desviación típica
c) Calcula el coeficiente de variación

46. Las dimensiones de 50 explotaciones agrícolas de una región se recogen en la siguiente tabla. Calcula la desviación típica:

Dimensiones en Ha	Nº de explotaciones
[9,14)	16
[14,19)	24
[19,24)	5
[24,29)	4
[29,34]	1

7. Azar y probabilidad. Espacio muestral

A diario nos encontramos con distintas situaciones, en algunas de las cuales podemos predecir cuál será el resultado final (por ejemplo, a qué hora va a salir el sol) y otras en las que no tenemos ni idea de lo que va a suceder (cara o cruz al tirar una moneda).

Se llaman **fenómenos deterministas** a aquellos en los cuales se tiene absoluta certeza de cuál será el resultado. A los fenómenos en los cuales interviene el azar se les llama **aleatorios**.

En los sucesos aleatorios (por ejemplo, tirar un dado) tenemos más de un resultado posible. A cada posibilidad se le asigna un número llamado **probabilidad del suceso**. En el dado, hay una probabilidad de que salga un 6, otra de que salga un 5…

7.1. Sucesos. Espacio muestral

Lanzamos una moneda al aire. ¿Cuáles son los posibles resultados de este experimento?

Se llama **espacio muestral** al conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se representa por la letra **E**.

Cada uno de los resultados que forman el espacio muestral se llama **suceso elemental**.

Lanzamos una moneda al aire. ¿Cuáles son los posibles resultados de este experimento?

La moneda puede salir cara o cruz. Su espacio muestral es:

E = {Cara,Cruz}

Está formado por dos sucesos elementales:

{Cara}, {Cruz}

Si un suceso ocurre siempre, se le llama **suceso seguro**.

Si un suceso no ocurre nunca, es decir, nunca se presenta al realizar el experimento aleatorio, se le llama **suceso imposible**, y se simboliza por $\emptyset$.

Lanzamos un dado al aire y consideramos los sucesos "salir cara par" y "salir cara impar". El espacio muestral de nuestro experimento es: E = {1,2,3,4,5,6}

El suceso salir cara par es: A = {2,4,6}

El suceso salir cara impar es:B = {1,3,5}

Cada uno de estos sucesos está formado por más de un resultado del espacio muestral. A estos sucesos se les llama **sucesos compuestos**

7.2. Operaciones con sucesos

Lanzamos de nuevo un dado al aire y consideramos los sucesos "salir cara par" y "salir múltiplo de tres". El espacio muestral y los dos sucesos son:

- E = {1,2,3,4,5,6},
- El suceso salir cara par es: A = {2,4,6},
- El suceso salir cara múltiplo de tres es: B = {3,6}

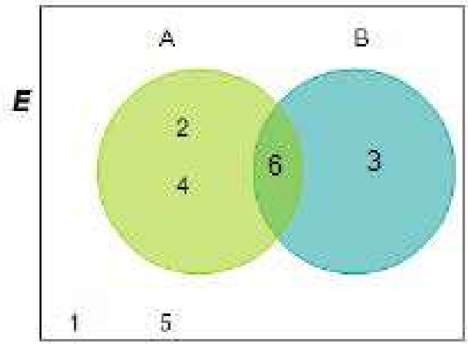
Las dos operaciones entre sucesos más importantes son la **unión** y la **intersección**.

El suceso formado por todos los sucesos elementales de A y de B se llama **unión de A y B** y se representa por **A U B**. En la unión consideramos que pueda suceder A **o** que pueda suceder B.

- El suceso unión de A y B es: **A U B** = {2,3, 4,6}

El suceso formado por los sucesos elementales comunes a A y a B se llama **intersección de A y B** y se representa por **A ∩ B.** En la intersección consideramos que tienen que suceder A **y** B a la vez.

- El suceso intersección de A y B es: **A ∩ B** = {6} }



Si representamos de forma gráfica los sucesos anteriores tenemos.

Todos los sucesos elementales de A más todos los sucesos elementales de B forman el suceso **unión** de A y B:

A U B = {2, 3, 4,6}.

Los sucesos elementales comunes a A y a B forman el suceso **intersección**:

A ∩ B = {6}

Estos sucesos se encuentran dentro del espacio muestral **E**.

Llamamos **suceso contrario** de un suceso A, al suceso formado por todos los sucesos del espacio muestral que no están en A. Se representa por Ā .

- El suceso contrario a salir cara par A = {2,4,6} es: Ā = {1,3,5}

La unión de un suceso más su contrario nos da siempre como resultado el espacio muestral:

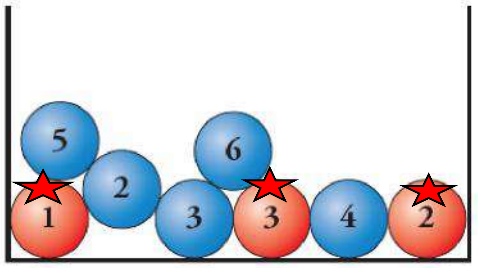
A U Ā = E .

La intersección de un suceso más la de su contrario es siempre un conjunto vacío, ∅.

Decimos que dos sucesos A y B son **incompatibles** cuando no tienen ningún suceso elemental común.

Decimos que dos sucesos A y B son **compatibles** cuando tienen algún suceso elemental común.

47. **Extraemos una bola de la siguiente urna:**



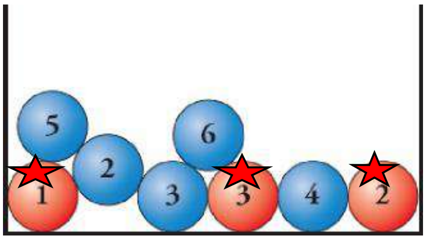
a) Escribe los siguientes sucesos:

E = Espacio muestral
A = Extraer una bola roja
B = Extraer una bola azul
C = Extraer un dos
D = Extraer un cinco
F = Extraer menos de tres

b) Contesta a estas preguntas. ¿Cuál de los sucesos anteriores es el más probable? ¿Cuál es el menos probable?

48. **Vamos a considerar de nuevo la urna con las bolas rojas y azules.**

Tenemos los sucesos
A = {bola roja}
B = {números pares}



49. **¿Cuál es el suceso contrario de A? ¿Y de B? ¿Son A y su contario compatibles? ¿Y A y B, son compatibles? ¿Cuánto vale A U B? Razona tus respuestas.**

50. **¿Cuál es el espacio muestral que se obtiene al lanzar dos dados y anotar la suma de las cantidades que salen?**

50 bis. Considera los sucesos A={múltiplos de 3} y B= {números primos}. Calcula el suceso A-B y B-A. ¿Son iguales?

8. Análisis de la posibilidad de que un suceso ocurra: Ley de Laplace

En un experimento aleatorio:

Llamamos **frecuencia absoluta, f_i**, al número de veces que aparece un resultado.

Llamamos **frecuencia relativa, h_i**, al cociente entre la frecuencia absoluta y el número de veces que repetimos el experimento

Lanzamos una moneda al aire diez veces. Seguramente esperamos que salga cinco veces cara y cinco veces cruz, pero la realidad nos dice que esto no es así. Sin embargo, cuando lanzamos la moneda un número grande de veces observamos que se producen ciertas regularidades.

En la siguiente tabla aparece el número de veces que hemos lanzado la moneda, el número de veces que ha salido cara, el número de veces que ha salido cruz y las correspondientes frecuencias

Número de lanzamientos		100	150	200	300	400	500
Cara	f_i = f. absoluta	56	68	108	132	208	255
	h_i = f. relativa	0,56	0,45	0,54	0,44	0,52	0,51
Cruz	f_i = f. absoluta	44	82	92	168	192	245
	h_i = f. relativa	0,44	0,55	0,46	0,56	0,48	0,49

relativas:

Podemos comprobar cómo a medida que aumentamos el número de lanzamientos, los valores de las frecuencias relativas se van aproximando al valor 0,5.

Se llama **probabilidad** al número al que se acerca la frecuencia relativa de un suceso cuando se aumenta el número de repeticiones del experimento aleatorio que se está realizando. La probabilidad, por lo tanto, es el número que nos va a dar el grado de medida de que un suceso aleatorio ocurra.

8.1. Regla de Laplace

Si lanzamos un dado (que no esté trucado) ¿cuál será la probabilidad de que salga la cara con el seis, o la cara con el uno? ¿Tenemos que lanzar el dado 100, 200, 300… veces para saber cuál es su probabilidad?

La Ley de Lapoace nos dice que la probabilidad de un suceso, A, es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles:

$$\boxed{\mathbf{P(A) = \dfrac{Número\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ posibles}}}$$

Ejemplo:

Lanzamos un dado regular al aire. ¿Cuál es la probabilidad de salir seis? ¿Y de salir uno? ¿Y de salir un número mayor que cuatro?

Primero calculamos el espacio muestral, que es el que nos indica el número de casos posibles que pueden suceder.

En este caso es: E = {1,2,3,4,5,6} El número de casos posibles es seis.

El suceso salir seis, A, es sólo uno, luego el número de casos favorables es uno:

A = {1}

$$P(A) = \frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$$

El suceso salir uno, B, es uno, luego el número de casos favorables es uno:

B = {1}

$$P(B) = \frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$$

El suceso salir un número mayor que 4, C, es uno, luego el número de casos favorables es uno:

C = {5, 6}

$$P(C) = \frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{2}{6} \approx 0{,}333$$

8.2. Propiedades de la probabilidad

El valor de la probabilidad será un número que estará entre 0 y 1. La probabilidad del suceso seguro será 1 y la probabilidad del suceso imposible será 0.

La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio es uno.

La **probabilidad de un suceso más la de su contrario** da siempre la unidad que es la probabilidad del espacio muestral. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ despejando queda $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$

51. Disponemos de una baraja española de 40 cartas. Responde a las siguientes cuestiones: Al extraer una carta, calcula la probabilidad de:

a) Sacar figura.
b) No sacar copas.

52. En una ciudad se publican dos periódicos, *Noticias* y *Tu ciudad*. Se sabe que la probabilidad de que una persona, elegida al azar, lea *Noticias*, es 0,30, y de que lea *Tu ciudad* es 0,25. Además, hay personas que leen ambos periódicos con una probabilidad de 0,05. Calcula la probabilidad de que una persona al azar lea alguno de los periódicos.

53. Un club deportivo tiene 300 socios de los cuales 150 juegan al fútbol, 100 juegan al baloncesto, y 90 practican natación. Sabemos que los que practican natación no hacen otro deporte. Eligiendo un socio al azar cual es la probabilidad de:

a) Que practique fútbol.
b) Que practique baloncesto.
c) Que practique natación.
d) Que practique fútbol y baloncesto.
e) Que practique fútbol o baloncesto.
f) Que practique fútbol o natación.

54. Al administrar una medicina a un paciente se controlan los posibles efectos secundarios, observando los siguientes síntomas: A = "no sufre efectos secundarios", B = "siente náuseas", C = "le produce somnolencia".

Administramos el medicamento a 200 personas, obteniendo los siguientes resultados:

Sucesos	fi
A	122
B	46
C	42
$B \cap C$	10

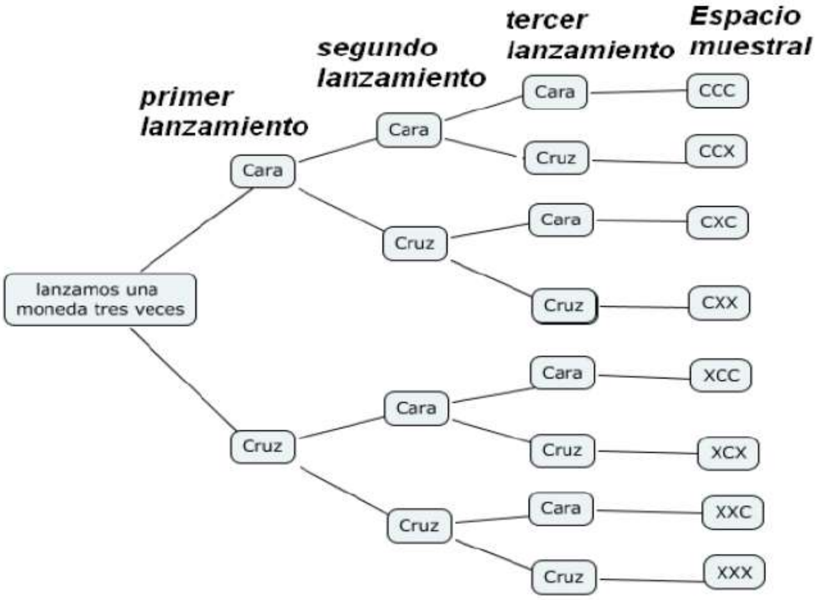
Calcula las probabilidades de los sucesos: $A \cup B$, $B \cup C$, $\bar{A}, \bar{B}$

9. Probabilidad compuesta

Si lanzamos una moneda al aire, tenemos un experimento aleatorio simple. Si lanzamos dos monedas al aire, o si lanzamos una moneda dos veces, tenemos un **experimento aleatorio compuesto**

El espacio muestral, si lanzamos una moneda dos veces, es: E = {CC, CX,XC,XX}

Los sucesos elementales son: {CC},{CX},{XC},{XX}



E={CCC,CCX,CXC,CXX,XCC,XCX,XXC,XXX}

Cada vez que el número de lanzamientos de la moneda es mayor, resulta más complicado obtener su espacio muestral.

Existen diferentes recursos para poder calcular este espacio muestral. Uno de ellos es la realización de diagramas de árbol.

9.1. Experimentos dependientes e independientes

Los experimentos simples que forman un experimento compuesto pueden ser de dos tipos: **dependientes** (el resultado de cada uno influye en los siguientes) o **independientes**.

Sacamos dos cartas de una baraja española, ¿influye el resultado de la primera extracción en el resultado de la segunda extracción?, ¿cuál sería la probabilidad de que la segunda carta que extraemos sea un as si la primera es un as?

La probabilidad de sacar un as en la primera extracción, sabiendo que la baraja tiene 4 ases y 40 cartas es:

$$P(\text{ 1ª As}) = \frac{\text{Nº de casos favorables As}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{4}{40} = 0{,}1$$

Si hemos sacado un as de la baraja, ya no hay cuatro, quedan tres ases de 39 cartas. La probabilidad de sacar un as en la segunda extracción es:

$$P(\text{ 2ª As}) = \frac{\text{Nº de casos favorables As}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{3}{39} \approx 0{,}077$$

En el caso del lanzamiento de una moneda varias veces, o de un dado, el resultado del primer lanzamiento no influye en el lanzamiento del segundo. Las probabilidades no varían.

9.2. Probabilidad compuesta

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda dos veces salgan las dos veces cara? Podemos calcular la probabilidad utilizando directamente la regla de Laplace:

E = {CC, CX,XC,XX}

$$P(\,CC) = \frac{\text{Nº de casos favorables CC}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

55. Obtén el espacio muestral al lanzar un dado y una moneda. ¿Es un experimento compuesto? ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par? ¿Depende el suceso par de salir cara o cruz en la moneda?

56. Al extraer dos cartas de una baraja española, calcula la probabilidad de:

a) La primera sea un as y la segunda un rey (MULTIPLICA LAS DOS PROBABILIDADES)
b) Que una sea un as y la otra un rey.
c) Al extraer tres cartas, calcula la probabilidad de que las tres sean bastos.

57. Una urna contiene 3 bolas blancas y 2 negras. Consideremos el experimento consistente en lanzar una moneda al aire y a continuación extraer una bola de la urna. Sean los sucesos A = "la moneda sale cara", B = "extraer bola negra". ¿B es un suceso dependiente o independiente de A?

Dibuja el diagrama de árbol correspondiente a este experimento. Halla la probabilidad de obtener cara y bola negra.

58. Sean dos urnas, la primera con 2 bolas negras y 3 blancas, y la segunda con 1 bola negra y 2 blancas. Lanzamos una moneda al aire, y si sale cara extraemos una bola de la urna 1, mientras que si sale cruz la extraemos de la urna 2.

Consideremos los sucesos A = "obtener cara" y B = "extraer bola blanca". ¿El suceso B depende o no del suceso A? Dibuja el diagrama de árbol del experimento, asignando probabilidades a los distintos sucesos elementales.

9.3. Problemas de probabilidad para resolver con tablas de contingencia.

PROBLEMA ejemplo:

En una ciudad el 40% de los domicilios tiene conexión a Internet, el 33% tiene conexión de tV por cable y el 20% disfruta de ambos servicios.

Calcula la probabilidad de que al elegir al azar un hogar nos encontremos con al menos alguno de estos dos servicios.

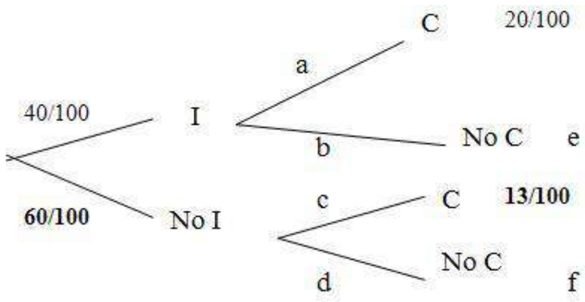
Se ha elegido un hogar en el que hay conexión a Internet. Probabilidad de que no esté equipado con TV por cable.

Características: Los Elementos objeto de estudio son los hogares de esa ciudad. En ellos se estudian dos circunstancias: conexión a Internet , y conexión a un canal de TV por cable. Se dan datos acerca de la probabilidad de ocurrencia de cada una de ellos , así como de ocurrencia conjunta de los dos.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN. Vamos a proceder a resolver el problema utilizado como ejemplo por tres métodos.

1. Diagrama en árbol.

Se muestra el diagrama de árbol correspondiente a la situación dada en el problema.



Selección de Notación : I={ conexión a Internet}, No I ={sin conexión a Internet}, C ={con TV por cable}, No C={sin TV por cable}

En el árbol se han señalado los datos dados en el problema así como aquellos que se deducen directamente y que están representados en negrita:

-Si el porcentaje de hogares con Internet es del 40% el de los hogares que no lo tienen será el 60%.

-Los hogares que tienen TV por cable son 1) los que teniendo ese servicio poseen además Internet, 2) los que teniendo ese servicio no tienen Internet. Los primeros son un 20% de acuerdo a los datos dados en el problema y los segundos deben ser un 13 % dado que el total de los hogares con cadenas de cable es un 33%.

Para completar la asignación de probabilidades en el árbol hace falta conocer a,b,c y d.

-La cantidad a se calcula del hecho de que 40/100 . a = 20/100 . Por tanto a=(20/100)/(40/100).

-La cantidad b se calcula a partir de a por el hecho de que a+b=1 al salir esas dos ramas del mismo nudo y no existir más.

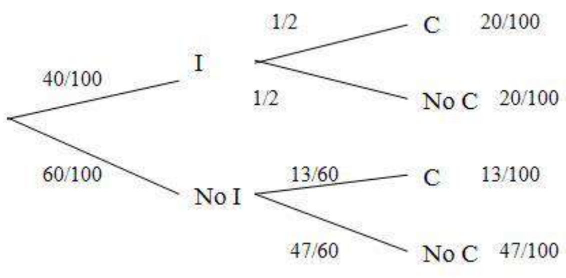
-La cantidad c se calcula de forma similar a la a, usando el hecho que 60/100 . c= 13/100.

-La cantidad d se calcula de forma similar a b por el hecho de que c+d debe ser igual a 1.

-La cantidad e se calcula multiplicando (40/100).b

-La cantidad f se calcula multiplicando (60/100).d

El árbol con todas las probabilidades asignadas resulta ser:



Una vez asignada todas las probabilidades al árbol no resulta difícil contestar a las cuestiones planteadas y a otras que también pudieran hacerse:

Probabilidad de que al elegir al azar un hogar nos encontremos con al menos alguno de estos dos servicios.

Método 1: Se puede verificar el suceso indicado siguiendo el primer, segundo o tercer camino del árbol. Por tanto deberemos sumar las probabilidades asociadas a esos tres. Se obtiene el 53%.

Método 2: Usando el suceso complementario al solicitado. Es muy fácil calcular en el diagrama en árbol la probabilidad de no tener ninguno de los dos servicios (probabilidad de seguir el último camino) . Restada de 1 esa probabilidad nos da la correspondiente a su complementario que es precisamente el suceso solicitado.

1-(47/100) =53/100 ó 53%

Se ha elegido un hogar en el que hay conexión a Internet. Probabilidad de que no esté equipado con TV por cable.

Método 1: Se nos pide la probabilidad P(no C|I). A partir del diagrama en árbol es fácil obtenerla pues esta probabilidad es precisamente la de la rama que lleva de I a no C. Por tanto la probabilidad solicitada es ½.

Método 2: dado que se nos pide P(no C|I). sabemos

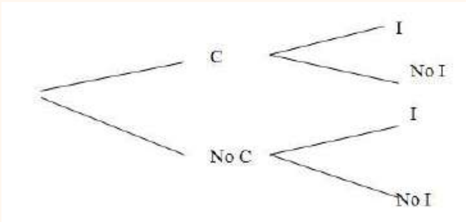
-que se ha producido I y por tanto que hemos seguido el primer o segundo camino.(Casos posibles)

-que estamos interesados en determinar cuál es la certeza de seguir precisamente el segundo (caso favorable). Haciendo uso de la regla de Laplace adaptada a estas situaciones obtenemos

P(noC|I)= probabilidad de seguir el camino 2/(probabilidad de seguir los caminos 1 ó 2)= 0,2/0,2=0,5.

TAREA

1) Resolver este mismo problema partiendo de esta otra alternativa de árbol.



2) Haciendo uso del árbol obtenido en la resolución del problema plantearse otras cuestiones en torno a la situación que impliquen,por ejemplo, el cálculo de probabilidades condicionadas. Reflexionar sobre el significado de las mismas con las conclusiones obtenidas realizar sendos informes con los siguientes títulos. 1)'¿Cómo influye el estar conectado a Internet en la instalación de otros equipamientos'?, 2)¿Cómo influye la conexión al servicio de TV por cable en el acceso a Internet de los hogares?

2. Tablas

Con los datos aportados en el enunciado se pueden incluir algunos datos en la siguiente tabla de contingencia.

	Internet (I)	No Internet (No I)	TOTAL (C/No C)
Cable TV (C)	**20**		**33**
No cable TV (No C)			**67**
TOTAL (I/No I)	**40**	**60**	**100**

No resulta difícil deducir los demás datos de la tabla a partir de los que se tienen considerando los totales por filas y columnas.

	Internet (I)	No Internet (No I)	TOTAL (C/No C)
Cable TV (C)	**20**	13	**33**
No cable TV (No C)	20	47	**67**
TOTAL (I/No I)	**40**	**60**	**100**

A partir de esta tabla nos podemos plantear el contestar a las cuestiones propuestas:

Probabilidad de que al elegir al azar un hogar nos encontremos con al menos alguno de estos dos servicios.

Método 1:

Se hace uso de la regla de Laplace puesto que cualquier hogar tiene las mismas opciones de ser elegido en un proceso aleatorio.

Casos posibles: 100. (datos dados en porcentajes)

Casos favorables: 20 (Tienen Internet y cable)+13 (tienen solo cable)+20(tienen sólo Internet) =53

Probabilidad: 53/100.

Método 2:

Se hace uso del suceso complementario (no tener ninguno de los dos servicios) y de la Regla de Laplace.

Casos posibles:100 (datos en porcentajes)

Casos favorables: 47 (no tienen ninguno de los dos servicios)

Probabilidad: 47/100.

La probabilidad solicitada es igual a 1 menos la probabilidad obtenida (Probabilidad del suceso complementario)

Se ha elegido un hogar en el que hay conexión a Internet. Probabilidad de que no esté equipado con TV por cable.

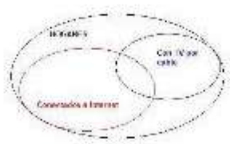
El hecho de saber que el hogar está conectado a saber nos permite reducir el número de casos posibles. De los 100 que había inicialmente pasamos a los 40 que están conectados a Internet.

De estos 40, los casos favorables son los 20 que representan a hogares en los que no hay conexión de TV por cable.

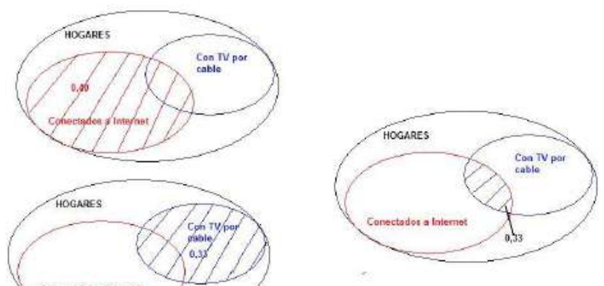
La probabilidad solicitada por tanto es 20/40.

3. Diagramas.

La situación descrita en el enunciado puede esquematizarse de acuerdo al siguiente diagrama.

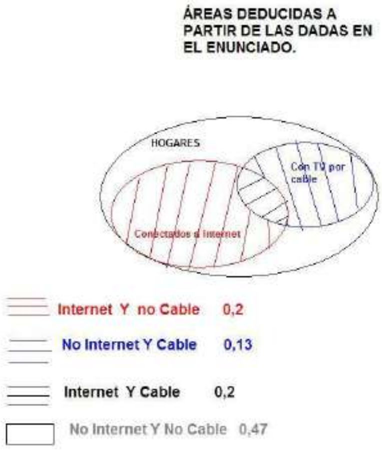


De acuerdo a los datos indicados en su enunciado conocemos el área de las regiones indicadas a continuación, suponiendo que el área total encerrada en la línea sea 1.



ÁREAS OBTENIDAS APARTIR DE LOS DATOS DEL PROBLEMA.

No resulta difícil a partir de ellas deducir el área de las cuatro regiones definidas en el esquema



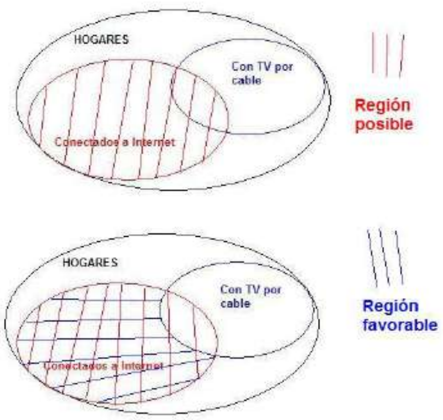
Con esa información podemos empezar a resolver las cuestiones propuestas

Probabilidad de que al elegir al azar un hogar nos encontremos con al menos alguno de estos dos servicios.

Esta probabilidad es igual a la suma de las tres áreas rayadas en el esquema. Por tanto resulta ser igual a 0,53 o lo que es lo mismo, el 53%.

Se ha elegido un hogar en el que hay conexión a Internet. Probabilidad de que no esté equipado con TV por cable.

Con el hecho de saberse que en el hogar hay conexión a Internet el espacio muestral queda reducido. Por tanto aplicando la regla de Laplace y considerando las regiones posibles y favorables indicadas en el siguientes esquema se resuelve el problema.



Cálculo de la probabilidad P(no Cable|Internet)

59. **En una ciudad el 60 % de sus habitantes son aficionados al fútbol, el 30 % son aficionados al baloncesto y el 25 % a ambos deportes.**

¿Son independientes los sucesos “ser aficionado al fútbol” y “ser aficionado al baloncesto”?.
Si una persona no es aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que no sea aficionada al baloncesto?
Si una persona no es aficionada al baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que sea aficionada al fútbol?

60. **-De 150 pacientes, 90 tienen una enfermedad cardiaca, 50 tienen cáncer y 20 tienen ambas enfermedades.**

a) Representar la situación mediante un diagrama de Venn.
b) Recoge en una tabla de doble entrada todos los datos aportados , asi como los que se puedan deducir de ellos.
c) Determina la probabilidad de que una persona tomada al azar tenga una sola de las dos enfermedades.
(Indicación: si transformas los datos dados a porcentaje el problema se asemeja mucho al resto)

61. **En una población se sabe que el 30% escucha los informativos por la Radio; el 60% por la Televisión; y el 20% los escucha por los dos medios de comunicación. Si se elige una persona al azar, determina la probabilidad de que:**

a) escuche alguno de los medios de comunicación.
b) escuche la Radio sabiendo que no ve la Televisión.
c) escuche sólo uno de los dos medios.

62. **La probabilidad de que un alumno lleve "tipex" a un examen es de 0,1; la probabilidad de que escriba a lápiz es de 0,6 y la probabilidad de que lleve "tipex" y también escriba a lápiz es de 0,05. Elegido un alumno al azar, calcula la probabilidad de que:**

1) lleve "tipex" o escriba a lápiz,
2) no lleve "tipex" y no escriba a lápiz.

10. Aplicaciones de la probabilidad

► Sorteo de la ONCE

Este sorteo está compuesto por cupones en los que hay 100.000 números distintos y cada uno tiene 1.000 series.

$$P(\text{ salga el número}) = \frac{\text{Nº de casos favorables nº}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{100.000} = 0{,}00001$$

La probabilidad disminuye para acertar la serie. Ahora los casos posibles son 100.000 X 1.000

$$P(\text{ salga nº y serie}) = \frac{\text{Nº de casos favorables nº y serie}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{100.000.000} = 0{,}00000001$$

► Lotería Nacional

En el sorteo ordinario de la Lotería Nacional hay 12 series de 100.000 billetes, de cada billete se hacen 10 fracciones (por eso se llaman décimos).

La probabilidad de obtener el primer premio será

$$P(\text{ primer premio}) = \frac{\text{Nº de casos favorables 1º}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{100.000} = 0{,}00001$$

La probabilidad de obtener el premio especial será

Casos posibles: 100.000 ·12 ·10 = 12.000.000

$$P(\text{ especial}) = \frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{12.000.000} = 0{,}00000008$$

► Quiniela futbolística

En cada partido se debe marcar una de tres posibilidades (1, x, 2). Como hay 15 partidos, las combinaciones posibles resultarían de multiplicar el 3 quince veces (3 3 3 3 3…) = 14.348.907

$$P(\text{ 15 aciertos}) = \frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{1}{14.348.907} = 0{,}00000007$$

63. **Calcula la probabilidad de acertar un boleto de la Lotería Primitiva sabiendo que el número de casos posibles es 13.983.816.**

► Probabilidad de un suceso compuesto. Regla del producto

64. **Se lanzan tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que:**

(a) los tres sean el número 6,

(b) los dos primeros sean el 6 y el tercero distinto del 6?

65. **Se extraen dos cartas de una baraja española de 40 cartas. Halla las siguientes probabilidades:**

a) Las dos cartas son copas

b) La primera carta es un rey la segunda es una sota.

c) Un rey y una sota

► Diagrama de árbol y regla del producto

66. **Una urna contiene tres bolas blancas y dos negras. Se extraen dos bolas al azar, una tras otra. Hallar la probabilidad de que:**

a) exactamente las dos sean blancas

b) una sea blanca y la otra negra

c) la primera sea blanca y la segunda sea negra

d) ninguna blanca (Sol: a) 0'3 b) 0'6 c) 0'3 d) 0'1)

67. **Una urna contiene tres bolas blancas y dos negras. Se extraen dos bolas al azar, una tras otra con devolución (esto es, se extrae la primera, se anota el color, se devuelve a la urna y se extrae la segunda anotando su color) Hallar la probabilidad de que:**

a) exactamente las dos sean blancas

b) una sea blanca y la otra negra

c) la primera sea blanca y la segunda sea negra

d) ninguna blanca (Sol: a) 9/25, b) 12/25, c) 6/25 , d) 4/25)

68. **Tres caballos A, B y C corren juntos, sus probabilidades de ganar son respectivamente 1/2, 1/3 y 1/6 . Si los caballos corren dos veces, ¿cuáles son las probabilidades de los sucesos elementales del espacio muestral compuesto?**

► Tablas de contingencia

69. **En un aula hay 100 alumnos, de los cuales: 40 son hombres, 30 usan gafas, y 15 son varones y usan gafas. Dispón los datos en una tabla y complétala. Si seleccionamos al azar un alumno de dicho curso:**

1 ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y no use gafas?

2 Si sabemos que el alumno seleccionado no usa gafas, ¿qué probabilidad hay de que sea hombre?

► Probabilidad total

70. **En cierta localidad un 43% de los habitantes son solteros y el 57% casados. De los solteros un 65% son fumadores y de los casados sólo un 52%. Se elige un habitante al azar. Calcula probabilidad de que sea fumador.**

71. **Una población está formado por tres grupos étnicos A(30%), B(10%) y C(60%). Los porcentajes del carácter ojos claros son, respectivamente, 20%, 40% y 5%. Calcula la probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga los ojos claros.**

72. **Disponemos de dos urnas: la urna A contiene 6 bolas rojas y 4 bolas blancas, la urna B contiene 4 bolas rojas y 8 bolas blancas. Se lanza un dado, si aparece un número menor que 3; nos**

vamos a la urna A; si el resultado es 3 ó más, nos vamos a la urna B. A continuación extraemos una bola. Se pide:

a) Probabilidad de que la bola sea roja y de la urna B

b) Probabilidad de que la bola sea blanca

73. **Se lanza una moneda cargada de modo que P(C) = 2/3 y P(X) = 1/3. Si sale cara se elige un número del 1 al 9; si sale cruz se elige al azar un número del 1 al 4. Hallar la probabilidad de que se escoja un número par.**

74. **Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas de una ciudad, de forma que el 60% de los autobuses cubre el servicio de la primera línea, el 30% cubre la segunda y el 10% cubre el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús se averíe es del 2%, 4% y 1%, respectivamente, para cada línea. Determina la probabilidad de que, en un día, un autobús sufra una avería.**

75. **Una empresa del ramo de la alimentación elabora sus productos en cuatro factorías: F1, F2, F3 y F4. El porcentaje de producción total que se fabrica en cada factoría es del 40%, 30%, 20% y 10%, respectivamente, y además el porcentaje de envasado incorrecto en cada factoría es del 1%, 2%, 7% y 4%. Tomamos un producto de la empresa al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre defectuosamente envasado?**

76. **Se lanzan dos monedas al aire. Si salen dos caras, se extrae una bola de una urna I, que contiene 2 bolas blancas y 3 negras. Si sale una cara y una cruz, se extrae una bola de una urna II, que contiene 4 bolas blancas y 1 negra. Si salen dos cruces, se extrae una bola de una urna III, que contiene 3 bolas blancas y 2 negras. ¿Cuál es la probabilidad de extraer bola blanca después de lanzar las monedas y sacar la bola?**

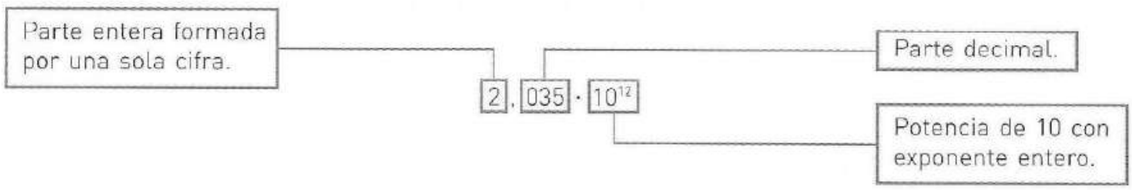
77. **En un colegio se imparten sólo los idiomas inglés y francés. El 80 % de los alumnos estudian inglés y el resto francés. El 30 % de los alumnos de inglés son socios del club musical del colegio y de los que estudian francés son socios de dicho club el 40 %. Se elige un alumno al azar. Calcular la probabilidad de que pertenezca al club musical.**

78. **En un centro escolar los alumnos pueden optar por cursar como lengua extranjera inglés o francés. En un determinado curso, el 90% de los alumnos estudia inglés y el resto francés. El 30% de los que estudian inglés son chicos y de los que estudian francés son chicos el 40%. El elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?**

REPASO GLOBAL

1- Notación Científica.

A- Expresar en notación científica



a) $2.\underbrace{365.000}_{6\ \text{cifras}} = 2,365 \cdot 10^6$ b) $0,\underbrace{0001}_{4\ \text{cifras}}45 = 1,45 \cdot 10^{-4}$

B- Operaciones:
B.1- Suma y resta.

Calcula: $9,76 \cdot 10^3 + 2,43 \cdot 10^2 - 3,1 \cdot 10^{-1} = 9,76 \cdot 10^3 + 2,43 \cdot 10^2 - 3,1 \cdot 10^{-1} =$

$$9,76 \cdot 10^3 + \frac{2,43}{10} \cdot 10 \cdot 10^2 - \frac{3,1}{10^4} \cdot 10^4 \cdot 10^{-1} = 9,76 \cdot 10^3 + 0,243 \cdot 10^3 - 0,00031 \cdot 10^3 =$$

$$= (9,76 + 0,243 - 0,00031) \cdot 10^3 = 10,00269 \cdot 10^3 = 10,00269 \cdot 10^3 = 1,000269 \cdot 10^4$$

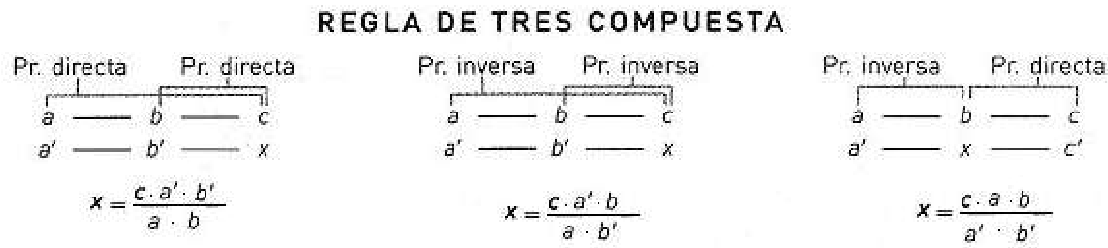
B.2- Multiplicación y división.

Calcula: $(2,1 \cdot 10^{-2} \cdot 3,2 \cdot 10^4) : (8 \cdot 10^3) = (2,1 \cdot 10^{-2} \cdot 3,2 \cdot 10^4) : (8 \cdot 10^3) =$

$$= [(2,1 \cdot 3,2) : 8] \cdot [(10^{-2} \cdot 10^4) : 10^3] = 0,84 \cdot 10^{-2+4-3} = 0,84 \cdot 10^{-1} = 0,84 \cdot 10^{-1} = 8,4 \cdot 10^{-2}$$

2- Proporcionalidad.

2.1- Reglas de tres.



2.2- Reparto proporcional.

3- Polinomios.

3.1- Valor numérico de un polinomio

$P(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 5$ para $x = 2$ será: $P(2) = 3(2)^3 - (2)^2 + 2(2) - 5 = 19$.

Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para $x = 1$ e $y = 3$.

a) $\frac{x - y^2}{2}$ **b)** $x^2 + 2xy + y^2$

Basta con sustituir los valores de x e y en cada una de las expresiones dadas:

a) $\frac{1 - 3^2}{2} = \frac{-8}{2} = -4$ **b)** $1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3^2 = 16$

3.2- Operaciones con polinomios.
- Suma.
- Resta.
- Multiplicación.
- División.

Productos notables

Cuadrado de la suma: $(x+a)^2 = (x+a)\cdot(x+a) = x^2+2ax+a^2$

Cuadrado de la diferencia: $(x-a)^2 = (x-a)\cdot(x-a) = x^2-2ax+a^2$

Suma por diferencia: $(x+a)\cdot(x-a) = x^2-a^2$

3.3- Descomposición factorial.

a) Sacar factor común.
b) Productos notables.
c) Factorización.. Regla de Ruffini.

$P(x) = x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

	1	2	−7	−8	12
1		1	3	−4	−12
	1	3	−4	−12	0
2		2	10	12	
	1	5	6	0	
−2		−2	−6		
	1	3	0		

$P(x) = (x-1)(x^3+3x^2-4x-12)$

$P(x) = (x-1)(x-2)(x^2+5x+6)$

$P(x) = x^4+2x^3-7x^2-8x+12 = (x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$

REPASO GLOBAL II

1- Ecuaciones.

1.1- Ecuaciones de primer grado.

1º. Si la ecuación tiene denominadores primero se eliminan éstos, para ello se calcula el común denominador de todos y una vez así se eliminan.

2º Se resuelven los paréntesis en caso de tenerlos

3º Se hace la transposición de términos. Los términos con x a un miembro y los términos independientes a otro (los términos que están sumando pasan restando y viceversa).

4º Se reducen (operan) los términos semejantes

5º Se despeja la x (el valor que multiplica a la x pasa dividiendo al otro miembro).

1.2- Ecuaciones de segundo grado.

Para resolver una ecuación de segundo grado del tipo $ax^2 + bx + c= 0$ se aplica la siguiente ecuación:

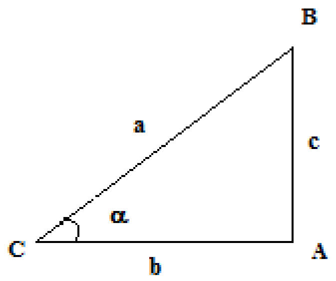
$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

1.3- Ecuaciones polinómicas con raíces enteras.
Cuando las ecuaciones son superiores a grado dos, para poder resolverlas tendremos que factorizar, del tal manera que las soluciones serán las raíces de dicho polinomio.

1.4- Ecuaciones irracionales sencillas.
Cuando en una ecuación la incógnita forma parte de una raíz, para resolverla tenemos que transformarla en racional y posteriormente aplicar los métodos anteriores para solucionarla.

Si sólo tiene una raíz, ésta se aísla en uno de los miembros de la igualdad y se eleva al cuadrado ambos miembros. Tras desaparecer la raíz se resuelve como una ecuación racional de primer grado.

3- Geometría. trigonometría



$$sen\alpha = \frac{cateto \;\; opuesto}{hipotenusa} \qquad sen\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto \;\; contiguo}{hipotenusa} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{a}$$

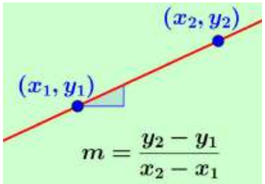
$$tg\alpha = \frac{cateto \;\; opuesto}{cateto \;\; contiguo} \qquad tg\alpha = \frac{c}{b}$$

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \alpha+\beta+\delta=180^\circ$$

4- Ecuación de la recta

- Ecuación explícita



$y = mx + n$ Donde **m** es la pendiente de la recta y **n** es la ordenada en el origen

Cálculo de la ecuación. Casos:

1- Dado m=3 y dado n=-2. Sustituirlos en la ecuación. $y = 3x - 2$

2- Dado m=3 y un punto P(3,7) Se sustituye m $y = 3x + n$ y una vez así para calcular n se sustituye la coordenada **y** del punto y la coordenada **x** $7 = 3 \cdot 3 + n$ donde $7 = 9 + n$ $7 - 9 = n$ $n = -2$ y nos queda $y = 3x - 2$

3- Dado dos puntos P (2,-2) y Q(-2,6) primero se calcula $m = \frac{(6-(-2))}{(-2-2)}$ $m = \frac{8}{-4} = -2$ se sustituye m $y = -2x + n$ y una vez así para calcular n se sustituye la coordenada **y** de uno de los puntos y la coordenada **x** $6 = (-2) \cdot (-2) + n$ donde $6 = 4 + n$; $6 - 4 = n$ $n = 2$ y nos queda $y = -2x + 2$

4- Que sea paralela a otra recta $y = 3x - 2$ y pase por un punto P(-1,3). Al ser paralela tienen la misma m=3; se sustituye m $y = 3x + n$ y una vez así para calcular n se sustituye la coordenada **y** del punto y la coordenada **x** $3 = 3 \cdot (-1) + n$ donde $3 = -3 + n$; $3 + 3 = n$ $n = 6$ y nos queda $y = 3x + 6$

5- Que sea perpendicular a a otra recta $y = 3x - 2$ y pase por un punto P(3,-1). Al ser perpendicular $\boxed{m' = -\frac{1}{m}}$ y por tanto $m' = -\frac{1}{3}$ se sustituye en la ecuación $y = -\frac{1}{3}x + n$ y una vez así para calcular n se sustituye la coordenada **y** del punto y la coordenada **x** $1 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + n$ donde $1 = -1 + n$; $1 + 1 = n$ $n = 2$ y nos queda $y = -\frac{1}{3}x + 2$

REPASO GLOBAL III

1- Funciones

Aspectos globales de una función.

Se llama función, y se representa por f(x) o por “y”, a la relación en la cual a cada valor de x se le asocia con un elemento, y sólo uno, de f(x) (o Y).

Las funciones se pueden expresar mediante gráficas, tablas o ecuaciones;

a) **Funciones lineales**. Se describen con ecuaciones de primer grado y=mx+n y se representan mediante rectas.

b) **Funciones cuadráticas** Ecuación $y = ax^2 + bx + c$ se representa mediante parábolas

Interpolación y extrapolación lineal. Aplicación a problemas reales.

Una función pasa por los puntos A(x_o,y_o), B(x_1,y_1), es decir, f(x_o)= y_o , f(x_1)= y_1. Si hay razón para suponer que la función es lineal en el intervalo [x_o,y_o], entonces podemos hallar su valor para cualquier abscisa, x, de este intervalo del siguiente modo:

Si $x \in (x_0, x_1)$ entonces $f(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_1}(x - x_0) + y_0$ a este proceso se le llama **interpolación lineal**

Si x es exterior a [x_o,y_o], el proceso se llama **extrapolación.**

Clasificación y características básicas de las funciones lineales, polinómicas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y racionales sencillas. Valor absoluto, parte entera.

Funciones lineales.

Son funciones polinómicas de primer grado de ecuación y=mx+n, se representa por una recta de pendiente m que pasa por el punto (0,n). La n se llama ordenada en el origen.

Funciones constantes

Las funciones del tipo y=K donde K es un número real se les denomina **función constante** y tienen como gráfica una recta paralela al eje de las x, y pasa por el punto (0,K).

Si tenemos x=H donde H es un número real, resulta una recta paralela al eje de las ¨y¨ pasa por el punto (H,0), pero no es una función porque a un valor de x no corresponde un único valor de y,

Funciones cuadráticas.

Son funciones polinómicas de segundo grado o funciones cuadráticas $y = ax^2 + bx + c$ donde $a \neq 0$, se representan mediante parábolas.

Representación gráfica.

1º Cortes con los ejes	2º eje de simetría	3º Vértice
Corte con el eje x para y=0 Se soluciona la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ y las soluciones son la coordenada x (x_1, 0) y (x_2, 0) **Corte con el eje y** para x=0 (0, c)	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	abscisa del vértice $x_0 = -\frac{b}{2a}$ Ordenada del vértice $y_o = a(x_0)^2 + b(x_0) + c$ Vértice (x_0, y_0)

2- Estadística.

Tabla de frecuencias.

Variable (x_i)	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i	Frecuencia Absoluta Acumulada H_i	Porcentaje H_i	Desviaciones $x_i - \bar{x}$	Cuadrado de las desviaciones $(x_i - \bar{x})^2$	Frecuencia por cuadrados $f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$

MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

Media	Moda	Mediana

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N}$$ Para intervalos se toma como valor de la variable la **marca de la clase**	Es el que más veces se repite	La mediana es el dato que deja tantos valores por encima como por debajo, una vez ordenados estos datos.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Desviación media	**Varianza**	**Desviación típica**.
Media de la diferencia que hay entre cada valor y el valor medio. $$DM = \frac{\sum \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{N}$$	$$\sigma^2 = \frac{\text{fi } (\text{xi} - \bar{\text{x}})^2}{\text{N}}$$	$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

2- Probabillidad

Probabilidad clásica o de Laplace.

$$P(A) = \frac{\text{nº casos favorables a A}}{\text{nº casos posibles}} = \frac{\text{cardinal (A)}}{\text{cardinal (E)}}$$

Propiedades de la probabillidad.

a) $0 \leq P(A) \leq 1$

b) P (E) = 1 P(ϕ)=0

c) $P(A_1 \cup A_2 .... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$

d) P(A) =1- $\bar{A}$

e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Regla del producto: la probabilidad de cada suceso elemental es el producto de las probabilidades de cada rama del árbol que nos lleva hasta ese suceso.

Regla de la suma: la probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales que lo forman.