Nivel 2
Módulo 1

Ámbito Científico-Tecnológico

DEPARTAMENTO CIENTÍFICO-TECNOLÓGICO
Nivel 2 Módulo 1 (3º)

C.E.P.A. "Antonio Machado"

"En cuestiones de cultura y de saber, sólo se pierde lo que se guarda; sólo se gana lo que se da."

UNIDAD 1. CARACTERIZACIÓN DEL MOVIMIENTO. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Departamento Científico-Tecnológico

Edición 2020

Unidad didáctica N1.
Caracterización del movimiento. Velocidad y aceleración.

ÍNDICE

1. EL LENGUAJE ALGEBRAICO

1.1. INTRODUCCIÓN

En ocasiones has visto expresiones como la siguiente: **a + b = b + a**

Con ella representamos la propiedad conmutativa de la suma. Esta propiedad es cierta para cualquier par de números y por ello utilizamos letras en lugar de valores concretos.

En Matemáticas es frecuente utilizar expresiones que combinen números y letras o solamente letras. Esto lo hacemos cuando, como en el caso anterior, expresamos relaciones que se dan para todos los números. También cuando desconocemos el valor de algún dato lo representamos con una letra hasta que lo hallamos. Y también cuando no conocemos el valor numérico de algún dato y hemos de escribir una expresión en la que interviene aunque no se trate de hallar su valor.

Las expresiones que resultan de combinar números y letras relacionándolos con las operaciones habituales se llaman **expresiones algebraicas**. La parte de las Matemáticas que utiliza las expresiones algebraicas se llama **Álgebra**.

Muchas expresiones algebraicas que utilizamos resultan de una «traducción» del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico. Fíjate en los ejemplos y observa que a los número cuyo valor desconocemos unas veces le hemos dado el nombre de una letra y otras el de otra.

El doble de un número	2x
La mitad de un número	x / 2
El triple de un número menos 2	3y – 2
El doble del producto de dos números	2xy
La mitad del cuadrado de un número	$\frac{x^2}{2}$
La mitad de un número más su triple	$\frac{x}{2} + 3x$

Si la información es expresada mediante expresiones algebraicas estamos utilizando un lenguaje algebraico.

1.2. MONOMIOS Y OPERACIONES CON MONOMIOS

Un **monomio** es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las variables son el producto y la potencia de exponente natural. El número es el ***coeficiente*** y las letras forman la ***parte literal***

Ejemplos: $5x^2$, $\frac{3}{4}x^2$ **, tvz^3**

En el primero el coeficiente es 5, y la parte literal es x^2. En el segundo el coeficiente es $\frac{3}{4}$ y la parte literal x^2. En el tercero el coeficiente es 1 y la parte literal tvz^3

Se llama **grado** de un monomio a la suma de los exponentes de sus letras.

Ejemplos: $4x^2 \rightarrow$ es de grado 2

$3a^2b \rightarrow$ es de grado 3.

7 es de grado 0.

Vamos a considerar el siguiente ejemplo. Un coche lleva doble velocidad que un autobús, un avión lleva la velocidad del autobús al cuadrado y un tren lleva la tercera parte de la velocidad del avión.

Llamamos v a la velocidad del autobús, la velocidad del coche será 2·v, la velocidad del avión será v^2 y la del tren $\frac{1}{3}v^2$. Estas expresiones son monomios.

Vehículo	Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
Autobús	v	1	v	1
Coche	$2 \cdot v$	2	v	1
Avión	v^2	1	$v^2 = v \cdot v$	2
Tren	$\frac{1}{3}v^2$	$\frac{1}{3}$	v^2	2

Aquellos **monomios** que tienen la misma parte literal se dicen que son **semejantes**. La velocidad del autobús y la velocidad del coche son monomios semejantes. La velocidad del avión y la del tren también son semejantes. En cambio, la velocidad del autobús y la velocidad del avión no son monomios semejantes.

Vehículo	Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
Autocar	v	1	v	1
Coche	$2 \cdot v$	2	v	1
Avión	v^2	1	$v^2 = v \cdot v$	2
Tren	$\frac{1}{3}v^2$	$\frac{1}{3}$	v^2	2

SUMA Y RESTA CON MONOMIOS

Para poder sumar o restar monomios han de ser semejantes. El resultado es otro monomio que tiene por coeficiente la suma o la resta de los coeficientes y por parte literal la misma que tienen los monomios de partida.

Ejemplos: $5x + 2x = 7x$

$-3x^2 - 2x^2 = -5x^2$

La suma / resta de monomios semejantes permite a veces reducir expresiones algebraicas operando dentro de ella los monomios que sean semejantes.

$$3x^2 + 5x - 2x^2 - 9x = x^2 - 4x$$

$$2a + 5a - 9a + 8x^2 - 5x^2 = -2a + 3x^2$$

RECORDAMOS

- **Producto de potencias con la misma base.**

Para multiplicar potencias con la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.

Ejemplo: $2^5 \cdot 2^2 = 2^{5+2} = 2^7$.

PRODUCTO DE MONOMIOS

El producto de dos monomios-sean o no sean semejantes- es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y de parte literal el producto de las partes literales. (Recuerda el producto de potencias de la misma base).

Ejemplo: $3x^2 \cdot 5x^3 = 15x^5$

$4x \cdot (-2x^5) = -8x^6$

RECORDAMOS

- **División de potencias de la misma base.**

Se deja la misma base y se restan los exponentes. Ejemplo: $3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$

DIVISIÓN DE MONOMIOS

El cociente de dos monomios es el resultado de dividir sus coeficientes y sus partes literales. Puede ser monomio y puede no serlo.

Por ejemplo, $\frac{3x^5y}{6x^2y} = \frac{1}{2}x^3$ es un monomio, pero $\frac{3x^5y^3}{6x^2y^4} = \frac{x^3}{2y}$ no es un monomio.

Ejemplo→ 6x:2x= $\frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} \cdot \frac{x}{x} = 3 \cdot x^0 = 3 \cdot 1 = 3$

$10x^3 : (-5x) = \frac{10}{-5} \cdot \frac{x^3}{x} = -2x^2$

1.3. POLINOMIOS. OPERACIONES CON POLINOMIOS

Un **polinomio** es la expresión algebraica formada por la suma o resta de monomios no semejantes.

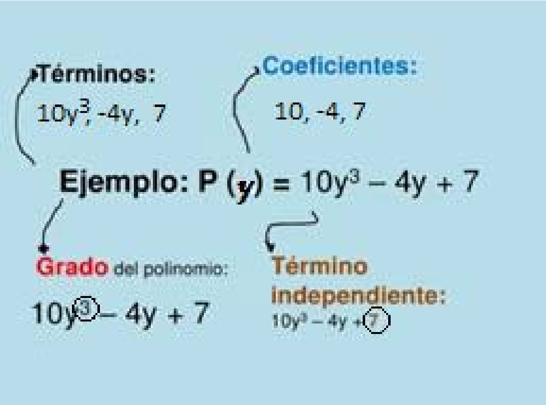


Imagen obtenida de:
https://es.slideshare.net/lillysdiaz/elementos-de-un-polinomio

Ejemplo: $10y^3 - 4y + 7$

En él cabe definir:

- **Términos:** cada uno de los monomios que forman el polinomio. ($10y^3$, - 4y, 7)
- **Grado:** el grado del polinomio es el del monomio con mayor grado. (3)
- **Coeficiente principal:** es el coeficiente del monomio de mayor grado. (10)
- **Término independiente:** es el término o monomio que no va acompañado de variable alguna,es decir, el término o monomio de grado cero. (7)

- Los polinomios suelen designarse con una letra mayúscula y entre paréntesis las variables.

$$P(x)= 5x^3 - 3x^2 + x + 3$$

Importante:

Puede ser que en un polinomio aparezcan varios términos del mismo grado, es decir, semejantes. En este caso se pueden sumar (o restar) entre sí los términos semejantes y obtenemos el **polinomio reducido**.

- **Ejemplo:** Sea el siguiente polinomio antes y después de ser reducido:

$$5x^3 – 2x^3 + 3x^2 + 4x^2 – 8x – 12x + 3 – 2$$

$$3x^3 + 7x^2 – 20x + 1$$

Los términos de un polinomio se suelen ordenar según su grado, generalmente de mayor a menor grado. Después de ordenarlo, es necesario reducirlo si hay términos semejantes

- Ejemplo: Sea el siguiente polinomio antes y después de ser reducido y ordenado:

$$8x^2 – 5x^3 + 4x – 6x^2 + 2x – 5$$

Primero se ordena de mayor grado a menor:

$$- 5x^3 + 8x^2 – 6x^2 + 4x + 2x – 5$$

Después se reduce:

$$-5x^3 + 2x^2 + 6x – 5$$

Polinomio opuesto. Se llama polinomio opuesto al que resulta de cambiar los signos de todos los términos.

Por ejemplo: Dado el polinomio $-7ab^4 + 3ab^2 - 2b + 10$. Escribe su opuesto:

El polinomio opuesto al dado es: $7ab^4 - 3ab^2 + 2b - 10$

SUMA DE DOS POLINOMIOS

La suma de polinomios se basa en la de monomios vista anteriormente. Se podrán sumar los términos que sean semejantes de los polinomios objeto de la suma.

Ejemplo: Dados los polinomios $P(x) = 3x + 2$; $Q(x) = 5x – 6$, calcúlese su suma:

$$(3x + 2) + (5x – 6)= 3x + 5x + 2 – 6 = 8x – 4$$

RESTA DE POLINOMIOS

Si en lugar de sumar dos polinomios se trata de restarlos, bastaría cambiar el signo a todos los términos del polinomio sustraendo y sumar los resultados.

Ejemplo. Dados los polinomios $P(x) = 6x – 5$ y $Q(x) = - 2x + 4$, efectúa su resta.

$$(6x – 5) – (- 2x + 4) = (6x - 5) + (2x - 4) = 6x -5 + 2x -4 = 6x + 2x – 5 – 4 = 8x – 9$$

PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UN POLINOMIO

Se multiplica el número por todos y cada uno de los monomios que forman el polinomio.

Ejemplo → $3\cdot (2x^3-3x^2+4x-2) = 6x^3 – 9x^2 + 12x - 6$

PRODUCTO DE UN MONOMIO POR UN POLINOMIO

Para realizar esta operación tenemos que multiplicar el monomio por cada término o monomio que forman el polinomio.

Ejemplo:

$$(3x^2)\cdot(2x^2y-4y)=(3x^2)(2x^2y)+(3x^2)(-4y)=6x^4y-12x^2y$$

PRODUCTO DE UN POLINOMIO POR UN POLINOMIO

Ahora tendremos que multiplicar cada monomio del primer polinomio por todos y cada uno de los monomios del segundo polinomio, y luego sumar o restar los monomios semejantes.

Ejemplo:

$$(3x^2+2y)\cdot(2x^2y-4y)=(3x^2)(2x^2y-4y)+(2y)(2x^2y-4y)=$$
$$(3x^2)(2x^2y)+(3x^2)(-4y)+(2y)(2x^2y)+(2y)(-4y)=6x^4y-12x^2y+4x^2y^2-8y^2$$

VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

Se denomina valor numérico de un polinomio (igualmente la definición es válida para expresiones algebraicas y monomios) al valor que se obtiene cuando se sustituyen las letras por números y se realizan las operación correspondientes.

Recuerda→ El valor numérico es siempre un número.

Recuerda--> A diferentes valores que toma la variable, diferentes valores numéricos toma el polinomio.

Ejemplo: Determina el valor numérico del polinomio $P(x) = x^2 - 3x + 5$ cuando $x = 2$

- Primero copiamos el polinomio tal y como está indicado, sustituyendo la letra por su valor:

$$P(2) = (2)^2 - 3\cdot(2) + 5 =$$

- A continuación se realizan las operaciones correspondientes y se obtiene el resultado:

$$= 4 - 6 + 5 = 3$$

- Por tanto, el valor numérico del polinomio $x^2 - 3x + 5$ cuando $x = 2$ es 3, se expresa $P(2)=3$

EJEMPLOS CON OTRAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

- La velocidad viene dada por la expresión $v=\frac{espacio}{tiempo}$

¿Cuál sería la velocidad de un coche que ha recorrido 200 kilómetros en un tiempo de 2 horas?

Si la velocidad es el espacio entre el tiempo tendríamos:

$$v = \frac{200}{2} = 100\,\frac{km}{h}$$

- El área del triángulo es $A = \frac{Base\cdot altura}{2}$

Si tenemos un triángulo de base 12 metros y altura 7 metros ¿qué superficie tiene?

$$A = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{12\cdot 7}{2} = 42m^2$$

IDENTIDADES NOTABLES

Las identidades notables son varias expresiones algebraicas que por su utilidad conviene conocer, ya que nos pueden ahorrar mucho tiempo en operaciones laboriosas. A continuación intentaremos definirlas y explicarlas detenidamente una a una.

- **Cuadrado de una suma:** es igual al cuadrado del primer sumando más el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo sumando.

- **Cuadrado de una diferencia:** es igual al cuadrado del primero menos el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

- **Suma por diferencia:** es igual a la diferencia de cuadrados.

Cuadrado de la suma:

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2$$

Cuadrado de la diferencia:

$$(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2 - 2xy + y^2$$

Producto de una suma por una diferencia:

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO Y PROBLEMAS

2.1. INTRODUCCIÓN

Cuando dos expresiones, numéricas o algebraicas, están unidas por el signo igual forman una igualdad.

Igualdad numérica: 4+1=6-1

Si en la igualdad aparecen letras o variables tendremos una igualdad algebraica.

Igualdad algebraica: 3x +4=28

- *EJEMPLO*: «Si sumo a mi edad mi edad, obtengo el doble de mi edad»

Si mi edad es x y le sumo mi edad que es x, obtengo el doble de mi edad que es 2x. En forma de igualdad, sería: $x + x = 2x$.

Si sustituimos la variable x por cualquier valor numérico comprobaremos que la igualdad es siempre cierta.

Valor de x	x + x	=	2x	resultado
10	10 + 10	=	$2\cdot 10 =$	20
15	15 + 15	=	$2\cdot 15 =$	30
20	20 + 20	=	$2\cdot 20 =$	40
25	25 + 25	=	$2\cdot 25 =$	50
50	50 + 50	=	$2\cdot 50 =$	100

Esta igualdad algebraica es una **identidad.**

Identidad: es una igualdad algebraica que siempre se cumple, independientemente de los valores que tomen las letras o variables.

- Veamos otro ejemplo: « Si sumo a mi edad 15 años, obtengo el doble de mi edad». En forma de igualdad sería: $x+15=2x$.

Si sustituimos la variable x por cualquier valor numérico, comprobaremos que solo es cierta para uno de ellos.

Valor de x	x + 15	=	2x	resultado
10	10 + 15 = 25	$\neq$	$2\cdot 10 =$	20
15	15 + 15 = 30	=	$2\cdot 15 =$	30
20	20 + 15 = 35	$\neq$	$2\cdot 20 =$	40
25	25 + 15 = 40	$\neq$	$2\cdot 25 =$	50
50	50 + 15 = 65	$\neq$	$2\cdot 50 =$	100

La relación solo se cumple cuando mi edad es de 15 años. La igualdad algebraica es una **ecuación.** A la variable de la ecuación, que en este caso es x, se le llama **incógnita**.

Una **ecuación** es una igualdad algebraica que se cumple para determinados valores de las letras.

Decimos que las **ecuaciones son de primer grado o lineales** cuando el exponente de las incógnitas es uno.

En una ecuación, la parte de la izquierda se llama **primer miembro** y la parte de la derecha **segundo miembro.**

$$\underbrace{x \quad + \quad 15}_{1^{er}\text{ miembro}} = \underbrace{2x}_{2^{\circ}\text{ miembro}}$$

Las **soluciones** de la ecuación son los valores que hacen que la igualdad sea cierta.

Las **ecuaciones** que tienen la misma solución se dice que son **equivalentes.**

$\boxed{\text{Ejemplo:}}$

La solución de las siguientes ecuaciones es x = 2. Para comprobar basta con sustituir este valor en la incógnita de la ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-1=3 \\ x+5=7 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo, queda:

$$\left.\begin{array}{r} 2\cdot 2-1=4-1=3 \\ 2+5=7 \end{array}\right\}$$

2.2. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO SENCILLAS

1. Se resuelve los paréntesis, si los tuviese.
2. Se emplea la transposición de términos de un miembro de la ecuación a otro, de forma que en un mismo miembro estén todos los términos que contienen la incógnita, dejando en el otro los términos independientes.

¿En qué consiste la transposición de términos?

- ***Los términos que están restando pasan al otro miembro sumando, y viceversa.***

$$x + 2 = 5$$

$$x = 5 - 2$$

$$x = 3$$

- ***Los términos que están multiplicando pasan al otro miembro dividiendo, y viceversa.***

3x= 6

x=6/3

x=2

3. Se realizan las operaciones necesarias en cada miembro.

4. Se despeja la incógnita.

5. Comprobamos que la solución es correcta.

Ejemplo:

$$2(x-1)-(x+1)=3(x-4)+3$$

1- Quitamos paréntesis:

$$2x-2-x-1=3x-12+3$$

2- Agrupamos en cada miembro los términos semejantes:

$$x-3=3x-9$$

3- Aplicamos la regla de la suma: o transponemos

$$9-3=3x-x \rightarrow 6=2x$$

4- Luego: Aplicamos la regla del producto o transponemos

$$x=\frac{6}{2}$$

La solución es **x = 3** y comprobamos la solución en la ecuación inicial.

2.3. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DENOMINADORES

1. *Reducir a común denominador los dos miembros.*

Para ello realizamos el m.c.m.

Recordamos. Mínimo común múltiplo

a. Se descomponen los números en producto de factores primos.
b. Tomamos los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.
c. El producto de esos factores es el mínimo común múltiplo.

2. *Nuestro nuevo denominador lo dividimos entre los denominadores anteriores y el resultado lo multiplicamos por el numerador.*

4. *Eliminamos los denominadores multiplicando toda la ecuación por el m.c.m.*

5. *Resolver la ecuación siguiendo los mismos pasos que en el otro apartado.*

Ejemplo:

$$\frac{2x+4}{5}-\frac{x+1}{2}=4$$

1- Primero hay que quitar denominadores, para ello calculamos el mínimo común múltiplo de 5, 2 y 1: m.c.m. (5,2,1) = 10

2- Multiplicamos la ecuación por 10:

$$\frac{10\cdot(2x+4)}{5}-\frac{10\cdot(x+1)}{2}=10\cdot 4$$

3- Simplificamos:

$$2(2x+4)-5(x+1)=40$$

4- Quitamos paréntesis:

$$4x+8-5x-5=40$$

5- Reducimos términos semejantes:

$$-x+3=40$$

6- Transponemos términos:

$$3-40=x$$

Luego la solución es **x = -37**

6. *Recuerda que el último paso que debes hacer es comprobar que la solución es correcta.*

2.4. TIPOS DE SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Al resolver una ecuación de primer grado podemos tener tres tipos de soluciones:

1ª Solución: $2x + 1 = 5$

$$2x = 5 - 1$$
$$2x = 4$$
$$x = \frac{4}{2} \rightarrow x=2$$

Decimos que la ecuación es ***compatible*** **porque tiene solución.**

2ª Solución: $2x + 1 = 2(x + 1)$

Resolviendo $2x + 1 = 2x + 2$

$$2x - 2x = 2 - 1$$
$$0x = 1$$

$0 = 1$ esto es falso luego implica que

esta ecuación es ***incompatible***. **No tiene ninguna solución** puesto que no hay ningún número que al multiplicarlo por cero nos dé uno.

3ª Solución: $2x + 2 = 2(x+1)$

Resolviendo: $2x + 2 = 2x + 2$

$2x - 2x = 2 - 2$

$0x = 0$

$0 = 0$

Cualquier número multiplicado por cero da cero. Luego **todos los números son solución de la ecuación**. Realmente lo que tenemos no es una ecuación, sino una **identidad.**

2.5. FASES PARA RESOLVER UN PROBLEMA

Pasos a la hora de resolver problemas mediante ecuaciones:

1. *Leer con atención el enunciado hasta comprenderlo.*
2. *Buscar la incógnita. Normalmente, la incógnita se busca entre la pregunta formulada.*
3. *Escribir en lenguaje algebraico la igualdad que plantea el problema.*
4. *Resolver de la ecuación.*
5. *Comprobar la solución.*
6. *Escribir la solución del problema.*

Ejemplo:

Jorge es 3 años menor que Álvaro, pero 7 años mayor que Ana. Si la suma de las edades de los tres es 38, ¿qué edad tiene cada uno?

Incógnitas: vamos a llamar **j,** a la edad de Jorge; **a,** a la edad de Álvaro y **m,** a la edad de Ana.

Datos: la suma de las edades es 38 años, luego la ecuación que vamos a plantear es: **j + a + m = 38**

Vamos a escribir en función de la edad de Jorge las otras edades:

Jorge: **j**

Álvaro: **j + 3**. Álvaro es tres años mayor que Jorge.

Ana: **j - 7**. Jorge es siete años mayor que Ana.

Sustituyendo en la ecuación queda: **j + j + 3 + j - 7= 38**

Resolviendo:

$j = 14 \text{años}$

La edad de Jorge es j = 14 años. De Álvaro: j + 3 = 17 años. De Ana: j – 7 = 7 años.

Estas tres edades suman 38 años y cumplen las condiciones del enunciado.

Ejemplo:

Un coche se mueve con una velocidad que es el doble de la de un camión que ha recorrido 145km en una hora y media. ¿Cuál es la velocidad de ambos vehículos?

Incógnitas del problema: $V_{camión}$ =? y V_{coche} =?

Datos del problema: $e_{camión}$ = 145 km, $t_{camión}$ =1,5 h

Relación entre las velocidades: $V_{coche} = 2\,V_{camión}$

Necesitamos una expresión que relacione la velocidad, la distancia y el tiempo:

$$v = \frac{e}{t}$$

Con estos datos podemos plantear la ecuación y resolver:

$$V_{camión} = \frac{e}{t} = \frac{145}{1,5} \cong 96,7\text{km/h} \quad V_{coche} = 2 \cdot 96,7 = 193,4\text{km/h}$$

3. IDENTIFICACIÓN Y RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA VARIABLE. PROBLEMAS

Sabemos que una ecuación es una igualdad algebraica que sólo es cierta para algunos valores de las incógnitas. Hasta ahora, hemos trabajado con ecuaciones de primer grado con una incógnita. Pero no todas las ecuaciones son así.

¿Cómo resolverías la ecuación x^2 + 10x =25?

3.1. FORMA GENERAL DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Las ecuaciones de segundo grado son aquellas en las que en uno de sus términos aparece la incógnita elevada al cuadrado.

La ***forma general*** de estas ecuaciones es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde **x** es la incógnita o variable y **a, b** y **c** son números o coeficientes.

$\mathbf{ax^2} \rightarrow$ Es el término cuadrático. (**a** es el coeficiente principal)

$\mathbf{bx} \rightarrow$ Es el término lineal.

$\mathbf{c} \rightarrow$ Es el término independiente.

Puede suceder que nuestra ecuación esté desordenada. Antes de usar un método para resolverla hay que agrupar los términos que son semejantes.

$\boxed{\text{Ejemplo:}}$

$$3(x^2+x)-2(x+5)=x^2-2x+3$$

1º. Quitamos paréntesis:

$$3x^2+3x-2x-10=x^2-2x+3$$

2º. Pasamos todos los términos al primer miembro; como en el segundo miembro no queda nada, nuestra expresión será igual a cero:

$$3x^2+3x-2x-10-x^2+2x-3=0$$

3º Agrupamos los términos que son semejantes:

$$(3-1)x^2+(3-2+2)x-10-3=0$$

La ecuación que queda es:

$$2x^2+3x-13=0$$

Donde a = 2, b = 3, c = -13

3.2. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS

Decimos que una ecuación es incompleta cuando le falta alguno de los términos que aparece en la expresión general.

a) Si el coeficiente **b es cero** el término b·x =0. La ecuación que queda es : $\mathbf{ax^2}+c=0$

Esta ecuación se resuelve como una de primer grado.

$\boxed{\text{Ejemplo:}}$

$$4x^2-32=0 \to 4x^2=32 \to x^2=\frac{32}{4} \to x^2=8$$

Para calcular el valor de x hay que hacer una raíz cuadrada:

$$\sqrt{x^2}=\pm\sqrt{8}\begin{cases} x=2{,}83 \\ x=-2{,}83 \end{cases}$$

b) Si el coeficiente **c es cero,** la ecuación que nos queda es: **ax^2 + bx = 0**

Esta ecuación se puede escribir como el producto de dos números x ·(ax+b) = 0, uno de ellos es x y el otro es (ax+b).

Para que el producto de dos números sea cero, uno de ellos ha de ser cero. Luego las soluciones son:

x=0

ax+b=0

Ejemplo:

$$3x^2+6x=0 \rightarrow x\cdot(3x+6)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3x+6=0 \rightarrow 3x=-6 \rightarrow x=\frac{-6}{3}=-2 \end{cases}$$

c) Si el coeficiente **b y c son cero,** la ecuación que nos queda es: $ax^2 = 0$

Se despeja la incógnita y se obtiene que la única solución posible de esta ecuación es que **x= 0**

Ejemplo:

$$4x^2=0 \rightarrow x^2=\frac{0}{4}=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{0}=0$$

3.3. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO COMPLETAS

La ecuación general es $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$ se resuelve por el método de formación de cuadrados, utilizando las identidades notables. Siguiendo ese proceso se llega a que las dos soluciones de la ecuación de segundo vienen dadas por la expresión:

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Lo primero que se debe hacer para resolver una ecuación de segundo grado es ordenarla, agrupar los términos que son semejantes, dejarla experesada como la ecuación general y extraer el valor de los coeficientes a, b y c que se sustituyen en la fórmula para las soluciones.

Ejemplo:

$x^2-5x+6=0$

Identificamos los coeficientes: a = 1, b = -5, c = 6.

Sustituimos en la solución:

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases}\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3\\ \frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2\end{cases}$$

3.4. SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

DISCRIMINANTE	Nº de soluciones
$\Delta>0$	2
$\Delta=0$	1
$\Delta<0$	Ninguna

El discriminante de una ecuación de segundo grado es:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Dependiendo del signo del discriminante, la ecuación puede tener dos, una o ninguna solución. $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

3.5. PROBLEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Al igual que con los problemas de ecuaciones de primer grado, debe plantear la ecuación correspondiente al enunciado del problema. La experiencia y el trabajo continuo hará que esta labor le resulte cada vez más sencilla. Una vez planteada, siga las instrucciones anteriores para resolver la ecuación y dar respuesta al problema.

EJEMPLO: *Si se multiplica la edad de Paracelso por su tercera parte y le resta 63, obtendrá el número 300. Calcule la edad de Paracelso.*

Sea x la edad de Paracelso, traducimos el enunciado al lenguaje algebraico y obtenemos:

$$x \cdot \frac{x}{3} - 63 = 300$$

$$\frac{x^2}{3} - 63 = 300$$

Reducimos a denominador común, simplificamos y reordenamos la expresión:

$$\frac{x^2}{3} - \frac{189}{3} = \frac{900}{3}$$

$$x^2 - 189 - 900 = 0$$

$$x^2 - 1089 = 0$$

La ecuación de segundo grado es incompleta. Se resuelve más rápido despejando x^2:

$$x^2 = 1089$$

$x^2 = 1089$; $x = \pm\sqrt{1089}$, por tanto $x = \pm 33$

Y como las edades sólo pueden ser positivas, Paracelso tiene 33 años

4. SISTEMAS DE ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS. PROBLEMAS

4.1. INTRODUCCIÓN

Se llama sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas al conjunto formado por dos ecuaciones con dos incógnitas cada una de ellas, que se suelen llamar x e y. Ejemplo

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Resolver el sistema consiste en hallar los valores de x y de y que sean solución simultáneamente de las dos ecuaciones. En la ecuación anterior la solución es x=1, y = 1, ya que si sustituimos la x y la y en las dos ecuaciones por estos valores, se cumplen ambas igualdades.

$$\begin{cases} 1 + 1 = 2 \\ 2 \cdot 1 - 1 = 1 \end{cases}$$

4.2 MÉTODOS PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES

Hay varios métodos para resolver los sistemas de ecuaciones. De ellos vamos a desarrollar tres: **sustitución, igualación y reducción.**

- **Método de sustitución**

Consiste en despejar una incógnita en una de las dos ecuaciones y sustituir su valor en la otra ecuación. Se obtiene así una ecuación con una sola incógnita.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$$

1. Se despeja (en positivo) una incógnita en una de las dos ecuaciones. Es conveniente elegir aquella incógnita cuyo coeficiente sea 1, si la hay.

En este caso la "y" de la segunda ecuación.

$$y = 10 - 3x$$

2. Se sustituye en la otra ecuación la incógnita que hemos despejado. En este caso sustituiremos el valor de "y" obtenido en función de "x" en la primera ecuación.

$$2x + 3\,(10 - 3x) = 9$$

3. Se obtiene una ecuación con una incógnita, y se resuelve dicha ecuación.

En este caso hallaremos el valor de x.

$$2x + 3\,(10 - 3x) = 9$$

$$2x + 30 - 9x = 9$$

$$2x - 9x = 9 - 30$$

$$-7x = -21$$

$$x = \frac{-21}{-7} = 3$$

4. Se sustituye el valor obtenido de la "x" en la ecuación en la que se había despejado la "y".

En este caso sustituiremos x=3 --> en y = 10 - 3x --> y = 10 - 3·3 = 1

5. Hemos obtenido la solución del sistema. En nuestro caso x=3; y =1.

6. Comprobación.

- **Método de igualación**

Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar los valores obtenidos. Se obtiene así una ecuación con una sola incógnita.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones. En este caso vamos a despejar la "x".

$$x= \frac{8+\ y}{2} \quad ; x= \frac{-1-2y}{}$$

2. Se igualan los resultados obtenidos, ya que la "x" debe valer lo mismo en las dos ecuaciones.

$$\frac{8+\ y}{2} = \frac{-1-2y}{}$$

3. Se resuelve la ecuación obtenida. Al resolverla nos da que la y = -2.

4. Se sustituye el valor obtenido de la "y" en la ecuación en cualquiera de las dos ecuaciones en las que hemos despejado la x

$$x= \frac{8+\ y}{2} \rightarrow x= \frac{8+\ (-2)}{2} \rightarrow x= \frac{8-6}{2} \rightarrow x= \frac{2}{2}=1.$$

5. Hemos obtenido la solución del sistema. En nuestro caso es x=1 ; y = -2

6. Comprobación.

- **Método de reducción**

Consiste en multiplicar cada una de las ecuaciones por un número tal que los coeficientes de cada una de las incógnitas sean iguales en las dos ecuaciones, pero con signos opuestos. Se suman las dos ecuaciones y se obtiene así una ecuación con una sola incógnita.

$$\begin{cases} 7x - 5y = 53 \\ -3x - 4y = 8 \end{cases}$$

1. Vamos a buscar (si es posible) alguna incógnita cuyos coeficientes tengan signo contrario. En este caso la "x" (7x en la primera y -3x en la segunda).

Y después vamos a multiplicar cada ecuación por el coeficiente (en positivo) que lleva la incógnita en la otra ecuación. Así, multiplicaremos la primera ecuación por 3 y la segunda por 7.

$$\begin{cases} 3 \cdot (7x - 5y = 53) \\ 7 \cdot (-3x - 4y = 8) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 21x - 15y = 159 \\ -21x - 28y = 56 \end{cases}$$

2. Sumamos las dos ecuaciones, miembro a miembro.

$$\begin{array}{r} 21x - 15y = 159 \\ + \quad -21x - 28y = 56 \\ \hline -43y = 215 \end{array}$$

3. Se obtiene una ecuación con una incógnita, y se resuelve -43y = 215; $y = \frac{215}{-43} = -5$

4. Se sustituye el valor obtenido de la y en una de las dos ecuaciones del sistema y hallamos el valor de "x".

$$7x - 5y = 53$$
$$7x - 5(-5) = 53$$
$$7x + 25 = 53$$
$$7x = 53 - 25$$
$$7x = 28 \qquad x = \frac{28}{7} = 4.$$

5. Hemos obtenido la solución del sistema. En nuestro caso es x= 4; y = -5

6. Comprobación.

4.3. TIPOS DE SOLUCIONES DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

Al resolver las ecuaciones lineales de primer grado podíamos tener distintos tipos de soluciones. Con los sistemas de ecuaciones pasa exactamente los mismos. Cuando un sistema tiene solución decimos que es compatible.

Los sistemas compatibles pueden tener una **única solución**. Entonces el sistema es ***compatible determinado.***

Si tiene **infinitas soluciones** decimos que el sistema es ***compatible indeterminado***.

Cuando un sistema **no tiene solución** se dice que es ***incompatible.***

4.4. PROBLEMAS

Nuevamente podrá encontrarse con enunciados de problemas que, traducidos al lenguaje algebraico, se resuelvan mediante un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Siga las instrucciones anteriores y use cualquiera de los métodos.

Ejemplo de movimiento:

Una barca que hace el servicio de llevar pasajeros por el río Guadiana los traslada de Badajoz a Mérida, distantes 75 km, en 5 horas, y de Mérida a Badajoz en 3 horas. Hallar la velocidad del barco y la de la corriente del río si estas se suponen constantes.

Incógnitas: $v_{barca} = ?\ v_{río} = ?$

Datos: $e = 75\,km$, $t_{Badajoz\text{-}Mérida} = 5h$ y $t_{Mérida\text{-}Badajoz} = 3h$

La relación entre velocidad, espacio y tiempo es:

$$v = \frac{e}{t}$$

Cuándo vamos de Badajoz a Mérida, la velocidad que llevamos es la de la barca menos la del río, y cuando vamos de Mérida a Badajoz la velocidad que llevamos es la velocidad de la barca más la del río, y esta velocidad es el espacio, 75 km, dividido entre el tiempo que tardamos en llegar.

Planteamos dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} v_{barca} - v_{río} = \frac{75}{5} = 15 \\ v_{barca} + v_{río} = \frac{75}{3} = 25 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} v_{barca} - v_{río} = 15 \\ v_{barca} + v_{río} = 25 \end{array}\right\}$$

Aplicamos uno de los tres métodos para resolver el sistema, por ejemplo, el de reducción. Si sumamos ambas ecuaciones nos queda:

$$2v_{barca} = 40 \rightarrow v_{barca} = \frac{40}{2} = 20$$

Sustituyendo en una de las dos ecuaciones primeras, calculamos la velocidad del río:

$$20 + v_{río} = 25 \rightarrow v_{río} = 25 - 20 = 5$$

La solución es $v_{barca} = 20$ km/h y $v_{río} = 5$ km/h.

Ejemplo de edades:

Hace tres años la edad de Elisa era el triple que la de Manuel. Dentro de tres años, la edad de Elisa será el doble que la de Manuel. ¿Qué edad tienen actualmente cada uno?

Incógnitas: edad de Elisa = x, edad de Manuel = y

Datos:

Edad	Hace tres años	Actualmente	Dentro de tres años
Elisa	x - 3	x	x + 3
Manuel	y - 3	y	y + 3

Ecuaciones:

$$\begin{array}{l} \text{Hace tres años} \\ \text{Dentro tres años} \end{array} \left.\begin{array}{l} (x-3) = 3(y-3) \\ (x+3) = 2(y+3) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x-3 = 3y-9 \\ x+3 = 2y+6 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x-3y = -6 \\ x-2y = 3 \end{array}\right\}$$

El resultado que se obtiene resolviendo el sistema por cualquier método es:

Elisa 21 años y Manuel 9 años.

Ejemplo de mezclas:

Un comerciante tiene dos tipos de café, natural y torrefacto. El natural vale 1,25 € el kilo y el torrefacto vale a 1,60 € el kilo. Quiere hacer una mezcla y obtener 100 kg de café a 1,50 € el kilo. ¿Cuántos kilos de cada tipo ha de mezclar si no pretende ganar ni perder en la operación?

Incógnitas: kilos de café natural = x, kilos de café torrefacto = y

Datos:

Café	Natural	Torrefacto	Mezcla
Kilos	x	y	100
Euros/kilo	1,25	1,60	1,50

Ecuaciones:

$$\begin{array}{lr} \text{relación de kilos} & x+y=100 \\ \text{relación de precio} & 1{,}25x+1{,}60y=1{,}50\cdot 100 \end{array}\Bigg\} \rightarrow \begin{array}{r} x+y=100 \\ 1{,}25x+1{,}60y=150 \end{array}\Bigg\}$$

Resolviendo el sistema utilizando cualquiera de los métodos conocidos obtenemos:

Café natural = 28,57 kilos y café torrefacto: 71,43 kilos .

5. CARACTERIZACIÓN DEL MOVIMIENTO. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

5.1. INTRODUCCIÓN

Imaginemos que vamos montados en un autobús. La pregunta sería: ¿nos movemos o estamos en reposo?

Hay dos respuestas lógicas.

- No nos movemos, puesto que estamos sentados y no cambiamos de posición respecto al conductor, ni a los pasajeros.
- O quizás, si nos movemos, puesto que vamos dentro del autobús, y éste va cambiando continuamente de posición, circula por las calles.

Entonces, ¿cuál es la respuesta correcta? ¿ De qué depende, entonces, el estado de movimiento o de reposo?

La solución sería que depende del observador. Si el observador está dentro del autobús, estaremos en reposo, puesto que respecto a él, no se cambia de posición, pero si el observador es una persona que está sentada en la cafetería y ve pasa el autobús, nos verá en movimiento, puesto que para ella, cambiamos de posición.

Por lo tanto, los conceptos de movimiento y reposo son relativos, y para definirlos correctamente, hay que fijar un sistema de referencia.

5.2. CONCEPTOS IMPORTANTES

- El **movimiento** se define como el cambio de posición de un cuerpo respecto a un sistema de referencia que se considera fijo
- Se define **trayectoria** como la línea imaginaria descrita por un móvil cuando éste se mueve respecto a un sistema de referencia
- El **desplazamiento** distancia que existe entre la posición final e inicial de un movimiento en línea recta.
- La **distancia o espacio recorrido.** Longitud de la trayectoria descrita por el móvil, desde su posición inicial hasta su posición final. (El espacio recorrido es un número, siempre positivo).

Distancia y desplazamiento sólo coinciden cuando el movimiento es rectilíneo y no hay cambio de sentido.

Visítame (trayectoria y desplazamiento):
http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esobiologia/2quincena1/2q1_index.htm

Visítame (sistema de referencia):
http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esobiologia/2quincena1/2q1_index.htm

5.3. VELOCIDAD

En el lenguaje coloquial, a la rapidez de la suele llamar velocidad, pero físicamente no deben confundirse, porque el término velocidad incluye, además de la rapidez, la dirección y el sentido del movimiento.

Los cuerpos cambian de posición y este cambio tarda un tiempo en producirse. La magnitud que relaciona el espacio recorrido por un cuerpo con el tiempo que tarda en recorrerlo se le llama velocidad.

- La velocidad se define como la división entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en recorrerlo. La unidad S.I. de velocidad es: metros/segundos (m/s).

$$\boxed{v = \frac{espacio\ recorrido}{tiempo\ empleado\ en\ recorrerlo}}$$

5.4. VELOCIDAD MEDIA E INSTANTÁNEA.

Es fácil diferenciar entre las dos; si un ciclista recorre una etapa de la Vuelta Ciclista con una velocidad media de 40 km/h no quiere decir que siempre ha mantenido esa velocidad. Obviamente, en llanos y descensos su velocidad ha sido mucho mayor que en las subidas a los puertos de montaña.

- La **velocidad media** es la magnitud que define la relación entre el espacio recorrido en total y el tiempo empleado en recorrerlo
  $\boxed{v = e / t}$
- La **velocidad instantánea** es la que se tiene en cada instante del movimiento

Esta velocidad media es la que utilizaremos en los problemas.

5.5. CAMBIO DE UNIDADES POR FACTORES DE CONVERSIÓN

El **factor de conversión** o **factor unidades** es un método de conversión que se basa en multiplicar por una o varias fracciones en las que el numerador y el denominador son cantidades iguales expresadas en unidades de medida distintas, de tal manera, que cada fracción equivale a la unidad. Es un método muy efectivo para cambio de unidades.

Ejemplo: Pasa 108 $\frac{km}{h}$ a $\frac{m}{s}$

$$108\,\frac{km}{h}\cdot\frac{1000m}{1\,km}\cdot\frac{1\,h}{3600s}=\frac{108\cdot1000\cdot1}{1\cdot3600}=\frac{108000}{3600}=30\frac{m}{s}$$

5.6. ACELERACIÓN

Volvamos al caso anterior del ciclista. No ha mantenido una velocidad constante durante todo el recorrido, ya que la velocidad fue mayor en los descensos y menor en las subidas.

La aceleración es la magnitud física que mide las variaciones de velocidad. Es “la velocidad con la que cambia la velocidad”. Esta magnitud está constantemente presente en nuestras vidas. Aceleramos al pisar el pedal del acelerador (aumentamos la velocidad) pero también estamos acelerando al pisar el freno (ya que disminuimos la velocidad)

La aceleración será por tanto positiva, si aumentamos la velocidad, y negativa si disminuimos la velocidad

En este curso sólo vamos a estudiar los movimientos rectilíneos, sin cambio de dirección. La aceleración se halla calculando el cociente entre la variación de la velocidad y el tiempo utilizado. Matemáticamente se expresa así:

$$\boxed{a=\frac{V\;-V_o}{t}}$$

Donde **v** significa velocidad final, $\mathbf{v}_o$ es la velocidad inicial (expresadas en m/s) y **t** es el tiempo expresado en s

La aceleración se mide en **m/s^2**

Visítame.
http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esobiologia/2quincena1/2q1_index.htm

5.7. TIPOS DE MOVIMIENTOS

Sabemos que la cinemática estudia el movimiento de los cuerpos en general, y que estos movimientos se describen a través de la posición, la velocidad y la aceleración del cuerpo.

Existen diferentes tipos de movimientos que presentan unas características y que se pueden clasificar según su trayectoria o su rapidez de la siguiente manera.

Imagen de BIOLOGÍA Y GEOLOGÍA. 2ºESO. Ed. Anaya.2008 S. BALIBREA, A.ÁLVAREZ, A. SÁEZ, M.REYES, J.M.VILCHEZ

5.7.1. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

En la práctica científica se tiende a considerar situaciones simplificadas de los fenómenos. Una vez comprendidas, se introducen nuevas variables que las aproximen más a la realidad.

En esta línea, el movimiento de un objeto está condicionado por su interacción con el resto de objetos del Universo, los cuales, con más o menos intensidad le comunican una aceleración que perturba su camino. Pero, ¿cómo sería el movimiento de un objeto completamente aislado, o simplemente si se anularan todas las interacciones que actúan sobre él?

Si un objeto en movimiento no tiene aceleración, describe una trayectoria rectilínea (no hay aceleración normal que cambie la dirección de la velocidad) y la rapidez es constante (no hay aceleración tangencial que modifique el módulo de la velocidad).Este tipo de movimiento se conoce como Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU).

Características del M.R.U.

- Trayectoria rectilínea.
- Velocidad constante, no varía. Esto hace que la velocidad instantánea, velocidad en cada punto, coincida con el valor de la velocidad media.
- No tiene aceleración, ya que no hay cambios en la velocidad.
- El móvil, o cuerpo en movimiento, recorre distancia iguales en tiempos iguales.

Ecuaciones de M.R.U.

- $x = x_o + v \cdot t$ (Donde "x" es la posición final, "x_0" la posición inicial, "v" la velocidad (constante) y "t" el tiempo).

En este movimiento el espacio recorrido coincide con el desplazamiento ($x = e$; $x_0 = e_0$) y podemos escribir:

- e= $e_o + v \cdot (t - t_o)$
- Si el t_o=0, nos queda → $\boxed{\boldsymbol{e = e_o + v \cdot t}}$

Si e_o= 0, nos queda → **e=** $\boldsymbol{v \cdot t}$ **; v=** $\boldsymbol{\frac{e}{t}}$ **; t=** $\boldsymbol{\frac{e}{v}}$

EJERCICIOS

Tenga en cuenta que en el fondo, lo que debe hacer es plantear una ecuación, ya que conocerá todos los datos salvo uno, que será la incógnita y lo que le pregunten. Aplique la expresión correcta, despeje la magnitud desconocida y resuelva la ecuación.

Ejemplo:

Supongamos que un corredor inicia una carrera. Cinco metros después se pone en funcionamiento el cronómetro. Su velocidad constante es de 7 m/s. Y lo que queremos averiguar es qué espacio habrá recorrido cuando el cronómetro indique 25 segundos de tiempo, si su movimiento es rectilíneo y uniforme.

Sustituimos en la fórmula los valores que poseemos:

Antes de que se dispare el cronómetro había recorrido 5 m, $\rightarrow x_0 = 5$

Su velocidad es de 7 m/s. $\rightarrow v = 7$

Y el tiempo empleado es 25 s. $\rightarrow t = 25$

$x = 5m + 25s \cdot 7m/s = 5 + 175 \rightarrow x = 180m$

Ejemplo:

¿A que velocidad se mueve un coche que lleva recorridos 50 km durante media hora en un trayecto recto a velocidad constante y que anteriormente había recorrido 110 km?

Antes de que entre en el trayecto recto había recorrido 110 km:

$\rightarrow x_0 = 110km$

La distancia total recorrida es

$\rightarrow x = 110 + 50 = 160km$

Y el tiempo empleado es media hora:

$t = \frac{1}{2}h$

Sustituyendo:

$\rightarrow x = x_0 + t \cdot v$, $160 = 110 + \frac{1}{2} \cdot v$

Resolvemos la ecuación de primer gado, donde la incógnita es la velocidad:

$160 - 110 = \frac{1}{2} \cdot v \rightarrow 50 = \frac{1}{2} \cdot v \rightarrow 2 \cdot 50 = v \rightarrow v = 100km/h$

También podríamos haber escrito que:

$v = \frac{e}{t} \rightarrow v = \frac{50}{0,5} = 100km/h$

Ejemplo:

Un motorista sale de Badajoz a las 4 horas y 30 minutos de la tarde a una velocidad de 120 km/h. Si la distancia entre Badajoz y Lisboa son 225 km y mantiene su velocidad constante durante todo el camino, ¿cuánto tiempo tardará en llegar a Lisboa? ¿Y a qué hora llegará?

No ha recorrido ningún espacio inicial:

$\rightarrow x_0 = 0km$

La distancia total que va a recorrer es:

$\rightarrow x = 225km$

Y la velocidad que lleva durante el recorrido es de:

$v = 120km/h$

Sustituyendo:

$\rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x_0} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}$, $225 = 0 + t \cdot 120 \rightarrow t = \frac{225}{120} \cong 1,88h$

Vamos a pasar las 0,88 horas a minutos:

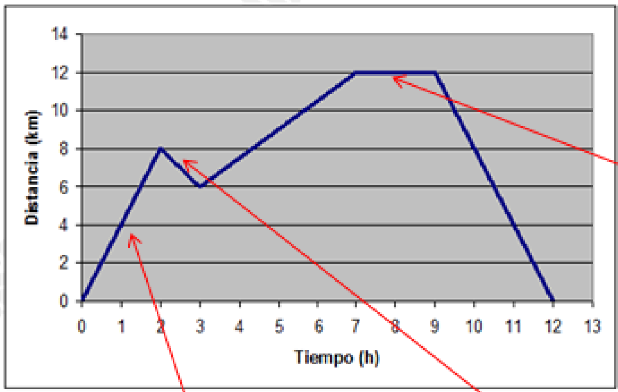
$0,88h \cdot \frac{60min}{1h} = 52,8\,min \cong 53\,min$

Luego el tiempo que tarda en llezzzgar es 1,88 h = 1h 53 min.

La hora de llegada será: 4h 30 min + 1h 53 min = 5h 83 min = 6h 23min de la tarde.

MRU. GRÁFICAS ESPACIO-TIEMPO

1. Un grupo de amigos ha ido de excursión, siendo su trayectoria conforme a la siguiente gráfica:



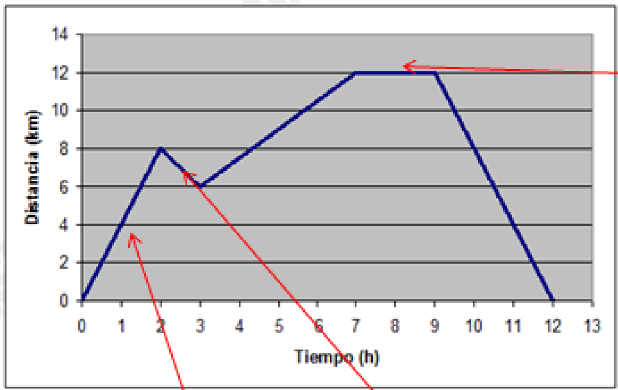
En este tipo de gráfica los tramos ascendentes representan movimiento alejándose de la referencia, los tramos descendentes representan movimiento que se acerca a la referencia, y los tramos paralelos al eje x significan reposo

Reposo

Movimiento

Movimiento

1. Un grupo de amigos ha ido de excursión, siendo su trayectoria conforme a la siguiente gráfica:



Para calcular la velocidad media de un tramo debe aplicar la expresión de la velocidad con los datos correspondientes a dicho tramo

Distancia recorrida = 0 km (reposo)
Tiempo empleado (en reposo) = 2 h

V = 0 km / 2 h = 0 km/h (reposo)

¡Ojo! Recuerde que los cálculos son tramo a tramo y no debe utilizar ni distancias ni tramos acumulados

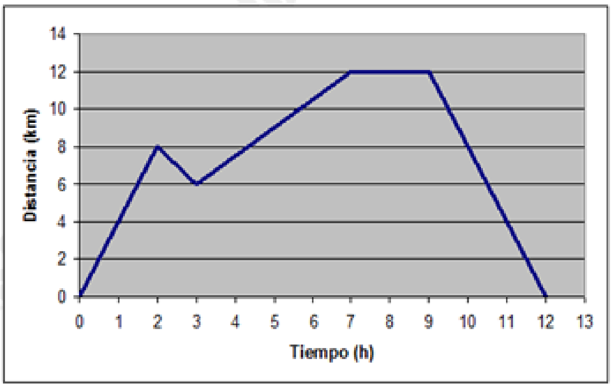
Distancia recorrida = 8 km
Tiempo empleado = 2 h

V = 8 km / 2 h = 4 km/h

Distancia recorrida = 2 km
Tiempo empleado = 1 h

V = 2 km / 1 h = 2 km/h

1. Un grupo de amigos ha ido de excursión, siendo su trayectoria conforme a la siguiente gráfica:



Y finalmente, recuerde que para calcular la velocidad media y la distancia total recorrida sí debe tener en cuenta los datos acumulados

Distancia total recorrida = 8 km + 2 km + 6 km + 0 km + 12 km = 28 km
Tiempo empleado = 12 h

Vm = 28 km / 12 h = 2,33 km/h

5.7.2. MOVIMIENTOS RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (MRUA). MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE RETARDADO (MRUR)

Cuando circulamos con un coche por la carretera, ¿llevamos una velocidad constante? ¿Cuándo aceleramos al entrar en la autovía, o cuando se pisa el freno al pasar por un cruce con límite a 50km/h?

Como se ha visto anteriormente, cuando la rapidez es constante los movimientos se denominan uniformes. Pero, en la mayoría de los movimientos, los movimientos varían la dirección de su trayectoria o su rapidez. Estos movimientos se denominan movimientos variados.

Entre estos destacamos aquellos cuya rapidez varía, pero de una manera regular, es decir, tienen aceleración tangencial, pero es constante y cuya trayectoria es rectilínea. Así hablamos de movimientos rectilíneos uniformemente acelerados (aceleración positiva) y rectilíneos uniformemente retardados (aceleración negativa).

- **Las características de estos movimientos son:**

Trayectoria → Línea recta.

Velocidad→ Variable.

Aceleración → Constante.

Recuerda que la aceleración se refiere a un cambio en el valor de la velocidad, por tanto, puede ser positiva o negativa, puesto que mide una variación de la velocidad, y ésta puede ser un aumento o una disminución.

En estos ejercicios y problemas la distancia SIEMPRE debe expresarse en m, la velocidad SIEMPRE debe expresarse en m/s y el tiempo SIEMPRE debe expresarse en s. Recuerde que la aceleración tiene por unidad m/s^2.

Los ejercicios de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado son también bastante sencillos, pero debe tener en cuenta que ahora son CUATRO las magnitudes que pueden entrar en juego: Espacio (o distancia), velocidad, aceleración y tiempo, a diferencia del apartado anterior, donde no había aceleración.

De esta manera podrá utilizar las siguientes expresiones:

- La expresión de la aceleración es: a= $\frac{V - Vo}{t}$

Donde: a= es la aceleración.

v = es la velocidad final.

v_o=es la velocidad inicial.

t= es el tiempo.

A partir de esta expresión, despejando, obtenemos:

- $\boxed{\mathrm{v} = \mathrm{v_o} + a \cdot t}$
- t= $\frac{V - Vo}{a}$

Además necesitamos una expresión que nos relacione el espacio recorrido por un cuerpo que varía su velocidad. De esta manera se tiene que:

$$x = x_o + v_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2;$$

En este movimiento el espacio recorrido coincide con el desplazamiento $x = e$; $x_o = e_0$) y podemos escribir:

$\boxed{e = e_o + v_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$; Si partimos de e_o= 0. Entonces: $\mathbf{e} = \boldsymbol{v_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$; (<u>Recuerde que podrá despejar la incógnita que necesite) (e= espacio recorrido, t=tiempo, $v_o = velocidad\ inicial$ y a=aceleración</u>)

Es también de bastante utilidad la expresión: $\boxed{v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot e}$

<u>(Nos relaciona las dos velocidades, inicial y final)</u>

Ejemplo:

Un móvil que parte del reposo acelera con una aceleración constante de 2 m/s^2. Calcula el valor de las velocidades que adquiere en los tres primeros segundos de su movimiento.

a (m/s^2)	t (s)	$v_f - v_o$ (m/s)	$v_f = v_o + a \cdot t$ (m/s)
2	1	v_f - 0	2
2	2	v_f - 2	4
2	3	v_f - 4	6

Como ves, la velocidad va aumentando, pero siempre de la misma manera, es decir, 2 m/s cada segundo que transcurre. Esto es lo que quiere decir que la aceleración es constante y vale 2 m/s^2.

Ejemplo:

Un vehículo que se mueve con una velocidad de 6 m/s acelera durante 5 s hasta alcanzar una velocidad de 20 m/s. Calcular la aceleración en ese intervalo de tiempo, supuesta constante.

Los datos que podemos obtener del enunciado del problema son:

La velocidad inicial es: v_0 = 6 m/s.

La velocidad final es: v_f = 20 m/s.

El tiempo es: t = 5 s.

Para calcular la aceleración aplicamos la fórmula:

$$a = \frac{v_f - v_o}{t}$$

En el denominador bastaria con poner t ya que t_0 = 0.

Sustituyendo los datos:

$$a = \frac{v_f - v_o}{t} = \frac{20 - 6}{5 - 0} = \frac{14}{5} = 2{,}8\,\frac{m}{s^2}$$

Ejemplo:

Supongamos que un vehículo se pone en marcha con una aceleración de 2,5 m/s^2. ¿Cuál será su velocidad al cabo de 5 segundos?

Si se pone en marcha es porque ha partido del reposo, luego la velocidad inicial es cero.

Para calcular la velocidad al cabo de 5s, que será la final, la despejamos de la fórmula de la aceleración:

$$v_f = v_i + a(t_f - t_i) = 0 + 2{,}5 \cdot (5 - 0) = 12{,}5 \text{ m/s}$$

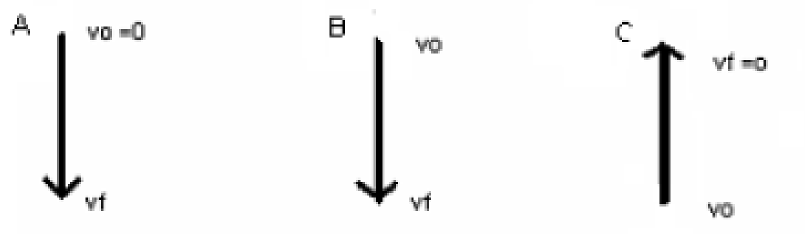
5.7.3. MOVIMIENTO DE CAIDA LIBRE

Es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, pero con trayectoria vertical, es decir, el movimiento de cuerpos que se dejan caer desde una determinada altura o se lanzan verticalmente hacia arriba o hacia abajo.

Tiene, por tanto, las mismas fórmulas que el movimiento anterior, aunque podemos aclarar que los espacios son alturas, y **la aceleración "a" es siempre la de la gravedad (g). La aceleración de la gravedad en la Tierra tiene un valor de 9,8 m/s^2**

¿Qué diferencia existe entre una baldosa que se desprende de lo alto de un edificio y cae, y una baldosa que es lanzada desde el mismo lugar por una persona?

En el caso de cuerpos que caen, la velocidad inicial es cero, puesto que no se lanzan, sino que caen por su propio peso. Por lo tanto, en el estudio del movimiento de caída libre nos encontramos con tres situaciones, que pueden esquematizarse en la forma:



Movimiento	Vo	Vf	**g** (m/s^2)
A	= 0	$\neq$ 0	9,8
B	$\neq$ 0	$\neq$ 0	9,8
C	$\neq$ 0	= 0	-9,8

- En las situacion A el cuerpo se suelta y su velocidad incial es cero (v_o=0) y la aceleración "g" es positiva porque el cuerpo se acelera al caer, cae a favor de su peso.
- En la situación B el cuerpo es lanzado con una velocidad inicial distinta de cero (v_o) y "g" es positiva.
- En la situación C el cuerpo es lanzado hacia arriba con una velocidad inicial distinta de cero (v_o) y "g" es negativa porque disminuye su velocidad y el cuerpo se desacelera, sube en contra de su peso.

En este último caso, ¿hasta dónde sube un cuerpo que lanzamos verticalmente hacia arriba? Alcanzará una cierta altura y, a partir de ahí comenzará a descender. Pues bien, en ese momento, la velocidad es cero, porque para que el movimiento de un cuerpo cambie de sentido, tiene que haber un instante en que se detenga. Justa a la altura que alcanza ese momento, se le llama altura máxima, y coincide justo, con el punto de velocidad final cero, (v = 0).

- **Leyes de la caída libre**

Todos los cuerpos en el vacío caen con un movimiento que puede considerar rectilíneo uniformemente acelerado.

Todos los cuerpos, independientemente de su masa y su volumen, caen en el vacío con la misma aceleración. Esta es la de la gravedad, y tiene un valor de 9,8 m/s^2 en la Tierra.

- **Ecuaciones del movimiento de caída libre**

Las ecuaciones que definen el MRUA son aplicables al movimiento de caída libre, tanto de descenso como de ascenso.

Tienes que tener en cuenta que ahora los espacios son alturas, y que la aceleración siempre es la de la gravedad. Recuerda, g positiva para los movimientos de caída, y negativa para los ascensos.

En el siguiente ejemplo la altura es el espacio recorrido (e) pero que le llamamos (s) del inglés space.

Ejemplo:

Desde un edificio de 30 metros de altura, se desprende una baldosa y tarda 2,47 s en llegar al suelo. ¿Con qué velocidad llegará?

La incógnita es la velocidad final, vf.

Como la baldosa cae, y nadie la lanza, la velocidad inicial es cero.

En este caso nos viene muy bien utilizar la última ecuación, que relaciona el cuadrado de las dos velocidades:

$$v_f^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s$$

Sustituimos los datos que tenemos:

$$v_f^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s = 2 \cdot 9{,}8 \cdot 30 = 588 \quad v_f^2 = \sqrt{588} = 24{,}25 \frac{m}{s}$$

Ejemplo:

Se lanza verticalmente hacia arriba un balón con una velocidad de 5 m/s^2. Calcula la máxima altura que alcanzará.

Nos piden la altura máxima, es decir el espacio que subirá el balón hasta detenerse para empezar a bajar. Recuerda que en este punto la vf es cero.

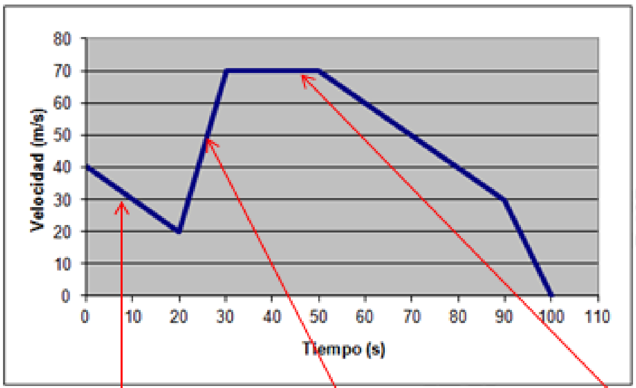
Calculamos primero el tiempo que tardará en alcanzar dicha altura:

$$g = \frac{v_f - v_0}{t}, t = \frac{-5}{-9{,}8} = \text{aproximadamente } 0{,}5$$

$$\text{y} \quad e = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 1{,}25 m$$

GRÁFICAS VELOCIDAD-TIEMPO. MRUR/MRUA

La siguiente gráfica muestra el recorrido de un móvil que circula siguiendo una trayectoria rectilínea.



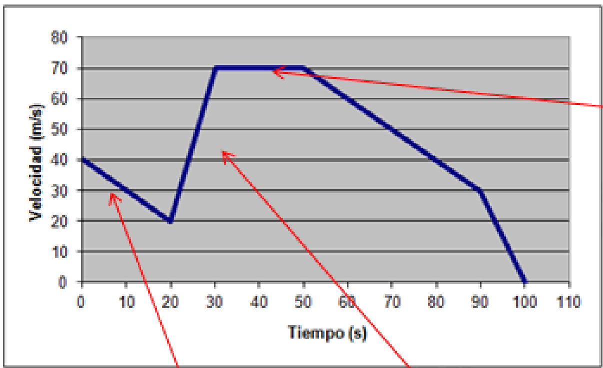
Deceleración

Aceleración

Velocidad constante

En este tipo de gráfica los **tramos descendentes** representan una disminución de la velocidad (o **deceleración**, tramos con un valor negativo de la aceleración), los **tramos ascendentes** representan un aumento de la velocidad (o **aceleración**, con valor positivo), y los **tramos en paralelo al eje X** representan **velocidad constante** (sin aceleración)

La siguiente gráfica muestra el recorrido de un móvil que circula siguiendo una trayectoria rectilínea.



Para calcular la **aceleración** de un tramo debe aplicar la expresión de la aceleración con los datos correspondientes a dicho tramo

Vf = 70 m/s
Vi = 70 m/s
T = 20 s

a = (Vf – Vi) /t

= (70 – 70) / 20 = 0 m/s²
(movimiento uniforme)

¡Ojo! Recuerde que los cálculos son tramo a tramo y no debe utilizar ni distancias ni tramos acumulados

Vf = 20 m/s
Vi = 40 m/s
T = 20 s

a = (Vf – Vi) /t

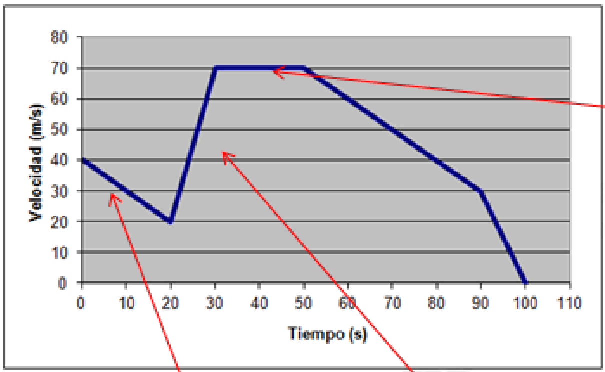
= (20 – 40) / 20 = - 1 m/s²
(Deceleración)

Vf = 70 m/s
Vi = 20 m/s
T = 100 s

a = (Vf – Vi) /t

= (70 – 20) / 10 = 5 m/s²
(Aceleración)

La siguiente gráfica muestra el recorrido de un móvil que circula siguiendo una trayectoria rectilínea.



Para calcular la **distancia recorrida en** un tramo debe aplicar, conocida la aceleración, la expresión de la distancia con los datos correspondientes a dicho tramo

$a = 0\ m/s^2$
$Vi = 70\ m/s$
$T = 20\ s$

$E = Vi \cdot t + ½ \cdot a \cdot t^2$
$E = 70 \cdot 20 + ½ \cdot 0 \cdot 20^2 =$
$1400 + 0 = 1400\ m$
(equivalente a un movimiento uniforme)

¡Ojo! Recuerde que los cálculos son tramo a tramo y no debe utilizar ni distancias ni tramos acumulados

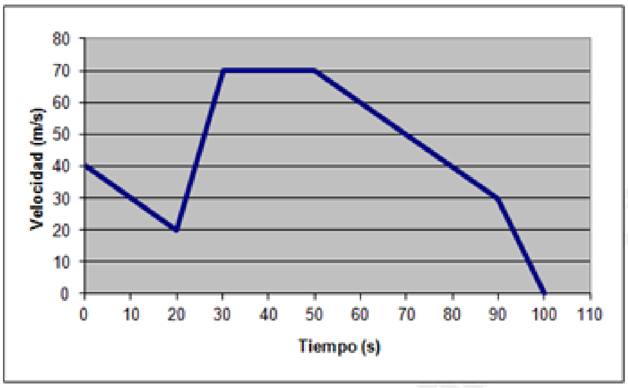
$a = -1\ m/s^2$
$Vi = 40\ m/s$
$T = 20\ s$

$E = Vi \cdot t + ½ \cdot a \cdot t^2$
$E = 40 \cdot 20 + ½ \cdot (-1) \cdot 20^2 =$
$800 – 200 = 600\ m$

$a = 5\ m/s^2$
$Vi = 20\ m/s$
$T = 100\ s$

$E = Vi \cdot t + ½ \cdot a \cdot t^2$
$E = 20 \cdot 10 + ½ \cdot 5 \cdot 10^2 =$
$200 + 250 = 450\ m$

La siguiente gráfica muestra el recorrido de un móvil que circula siguiendo una trayectoria rectilínea.



Finalmente, recuerde que para el cálculo de la velocidad media de todo el recorrido deberá aplicar la ya conocida expresión de:

$$v = \frac{e}{t}$$

Utilizando como Espacio total la suma de los recorridos en cada tramo (que en este problema es de 4600 m), y como tiempo total el global del movimiento (en este problema son 100 s)

Así: Vm = 4600 / 100 = 46 m/s

6. ESTUDIO DE LAS FUERZAS. LAS FUERZAS DE LA NATURALEZA. LEYES DE LA DINÁMICA

Figura 10.1: Imagen de un freno ABS, capaz de detener el movimiento de un vehículo

Imagina que un objeto está en reposo ¿cómo conseguirías que comenzara a moverse? Igualmente, imagina que un objeto o móvil lleva una velocidad constante, ¿cómo conseguirías que se pararse o que aumentara su velocidad?

En ambos casos, tendrías que realizar una acción sobre ese objeto. Denominamos fuerza a cualquier acción capaz de modificar el estado de reposo o movimiento de un cuerpo.

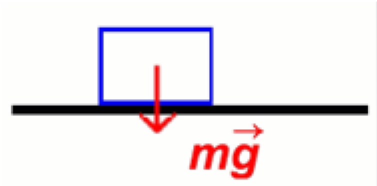
La fuerza es una magnitud física, es decir, se puede medir. Su unidad en el Sistema Internacional es el newton, representado por N. Un newton es la fuerza que hay que hacer para que un cuerpo de masa 1 kg varíe su velocidad 1 m/s en cada segundo.

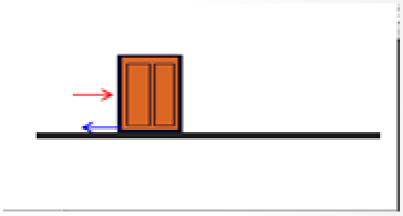
- Como veremos más adelante en la Segunda Ley de Newton

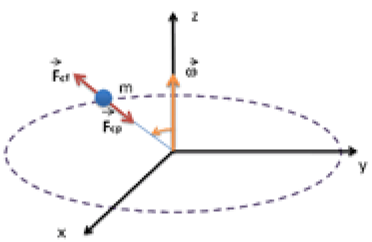
$$\boxed{F = m \cdot a}$$

- La fuerza es la causa, y la variación del estado de movimiento es la consecuencia

6.1. TIPOS DE FUERZAS

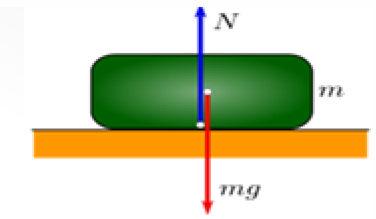






Algunas fuerzas que se observan en situaciones cotidianas:

- **Fuerza de peso**: fuerza con que la Tierra atrae a un objeto que se encuentra en sus proximidades.
- **Fuerza de rozamiento**: fuerza que se opone al movimiento de los cuerpos, debido a la fricción entre las superficies del objeto que está en movimiento y de los objetos sobre los que se mueve.
- **Fuerza centrípeta:** la que experimentan los cuerpos que se mueven describiendo un movimiento circular hacia el centro de la circunferencia descrita en su movimiento. Los cuerpos en movimiento notarían la llamada fuerza centrífuga, consecuencia del movimiento, dirigida hacia el exterior de la circunferencia que marca el movimiento.
- **Fuerza normal:** la que ejerce una superficie sobre un cuerpo que se apoya sobre ella.
- **Empuje vertical:** fuerza que experimenta, hacia arriba, un objeto cuando es sumergido en un fluido.
- **Fuerza de tensión:** fuerza que ejerce una cuerda sobre un objeto cuando a un extremo de ella se encuentra atado un objeto



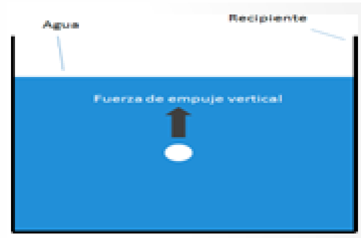


Imagen obtenida de:https://www.xatakaciencia.com/sabias-que/como-vuela-un-globo-i

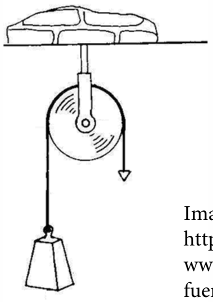


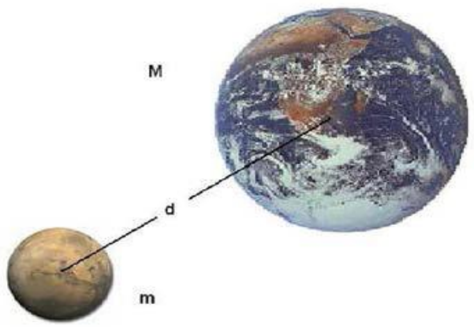
Imagen obtenida: https://www.tiposdecosas.com/fuerza_de_tension.html

LAS FUERZAS EN LA NATURALEZA

Los físicos entienden que en la naturaleza sólo hay cuatro tipos de fuerzas o interacciones.

Interacción gravitatoria	*Es la fuerza de atracción que tienen entre sí todos los cuerpos que tienen masa*
Interacción electromagnética	*Es la fuerza que aparece entre partículas y objetos con carga eléctrica*
Interacción nuclear fuerte	*Aparece en los núcleos atómicos, es la responsable de que éstos se mantengan unidos*
Interacción nuclear débil	*Es la fuerza responsable de que algunas partículas se descompongan en otras*

INTERACCIÓN GRAVITATORIA



Su expresión fue formulada por primera vez por Newton en la Ley de Gravitación Universal: «dos cuerpos se atraen con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

En la imagen, si la masa de la Tierra es M y la de la Luna M, y ambas están separadas una distancia d, la ley de Gravitación de Newton dice que se atraen con una fuera dada por la expresión

$$\boxed{F = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}}$$

G se denomina constante de gravitación universal. Su valor es el mismo siempre G=$6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Un **número en notación científica** es de la forma $\cdot \mathbf{10^n}$, donde:

- **a** es un número real mayor o igual que 1 y menor que 10, que recibe el nombre de coeficiente.
- **n** es un número entero, recibe el nombre de exponente.

Se utiliza para abreviar cantidades grandes o pequeñas.

Para expresar un número en notación científica identificamos la coma decimal (si la hay) y la desplazamos hacia la izquierda si el número a convertir es mayor que 10, en cambio, si el número es menor que 1 (empieza con cero coma) la desplazamos hacia la derecha tantos lugares como sea necesario para que (en ambos casos) el único dígito que quede a la izquierda de la coma esté entre 1 y 9 y que todos los otros dígitos aparezcan a la derecha de la coma decimal. Así obtenemos el coeficiente

La cantidad de lugares que movemos la coma (ya sea izquierda o derecha) nos indica el exponente que tendrá la base 10 (si la coma movemos dos lugares el exponente es 2, si lo hacemos 3 lugares, el exponente es 3, y así sucesivamente).

Siempre que movemos la coma decimal hacia la izquierda el exponente de la potencia de 10 será positivo.

Siempre que movemos la coma decimal hacia la derecha el exponente de la potencia de 10 será negativo.

Ejemplos:

$-2.365.000 = -2{,}365 \cdot 10^6$ al pasar de decimal a científica corremos la coma 6 lugares a la izquierda.

$0{,}00000154 = 1{,}54 \cdot 10^{-6}$ en éste caso 6 lugares a la derecha.

CALCULADORA: https://youtu.be/VhGmTbTdryU

6.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUERZAS

Recordemos que magnitudes eran aquellas propiedades que se podían medir (como por ejemplo, la masa, el tiempo, la velocidad o la fuerza), frente a aquellas propiedades que no se podían medir como la bondad, la sabiduría, la belleza, etc. Dentro de las magnitudes podemos distinguirlas en dos tipos:

- **Magnitudes escalares.** Quedan definidas dando un número y su unidad. Por ejemplo: «la masa de este objeto es 2kg», o «Tal suceso ha tenido una duración de 4s»
- **Magnitudes vectoriales.** En muchos casos las magnitudes escalares no nos dan información completa sobre una propiedad física. Por ejemplo una fuerza de determinado valor puede estar aplicada sobre un cuerpo en diferentes sentidos y direcciones. Tenemos entonces las magnitudes vectoriales que, como su nombre lo indica, se representan mediante vectores, es decir que además de un módulo (o valor absoluto) tienen una dirección y un sentido.

En cualquier vector podemos distinguir cuatro elementos:

- **Origen:** punto donde se ubica el vector. Si hablamos de velocidad, sería el móvil. En el caso de las fuerzas, se llama punto de aplicación de la fuerza.
- **Módulo o valor:** coincide con el valor numérico de la magnitud. Por ejemplo, 2 m/s o 4 N. Es el número que indica cuán grande es el vector.
- **Dirección:** cualquier vector se apoya sobre una línea imaginaria, ésta será su dirección.
- **Sentido:** indica hacia donde se orienta el vector.

Visítame:
http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esofisicaquimica/4quincena3/4q3_index.htm

Sobre un cuerpo pueden actuar más de una fuerza, como en la figura siguiente. En este ejemplo vemos dos fuerzas: la que ejerce el pie sobre el balón y la que ejerce la tierra sobre el balón (peso del balón). Ambas se aplican en el centro del balón.

Figura 11.2: Fuerzas actuando sobre un objeto

6.3. SUMA DE FUERZAS

Lo interesante de los vectores en general y de las fuerzas en particular, es que puede operarse con ellos. Vamos a considerar la suma de dos fuerzas en dos casos concretos. Cuando están en la misma dirección y cuando están en direcciones perpendiculares. A la fuerza suma se le llama fuerza resultante. El resto de casos podemos considerarlos en cursos más avanzados.

- **PRIMER CASO. FUERZAS EN LA MISMA DIRECCIÓN**

Cuando dos fuerzas se aplican en la misma dirección, la fuerza resultante es otra fuerza que tiene la misma dirección que las anteriores. Si las fuerzas que se suman tienen el mismo sentido, la fuerza resultante tendrá el mismo sentido que ambas, y su módulo es la suma de ambos módulos; si tienen sentidos opuestos, la fuerza resultante tendrá el sentido de la mayor de ellas y su módulo será la diferencia de ambas. Restar fuerzas equivale a sumar fuerzas de diferente sentido.

Ejemplo:

En la figura 11.3, tenemos dos fuerzas de valor 2 y 4 N, respectivamente, con la misma dirección y sentido, que se aplican sobre el mismo objeto, ¿cuál será la fuerza resultante? Observamos la figura:

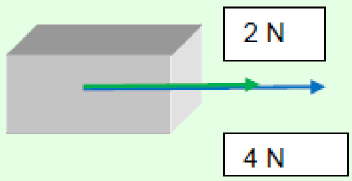
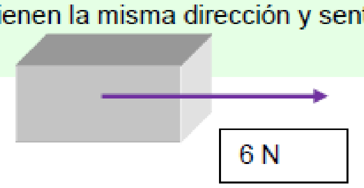


Figura 11. 3: Suma de fuerzas de igual dirección y sentido

Tienen la misma dirección y sentido



Ejemplo:

Calcular la fuerza resultante del conjunto de fuerzas que actúan sobre el objeto, en la figura 11.4

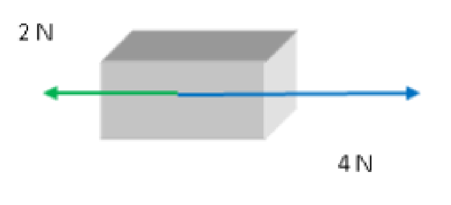
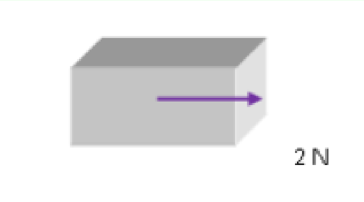


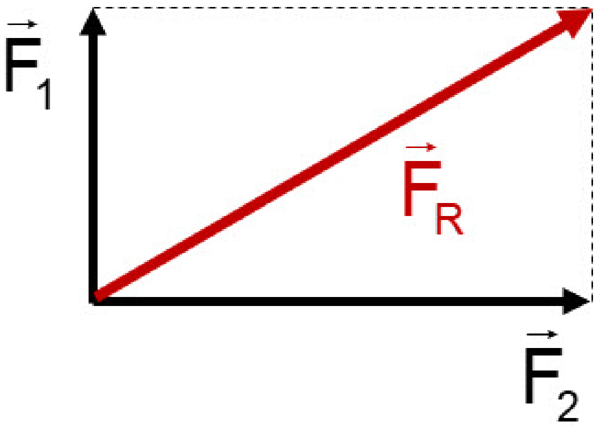
Figura 11.4: Suma de fuerzas de igual dirección y sentido contrario.

Misma dirección y sentido contrario



- **SEGUNDO CASO. FUERZAS EN DIRECCIÓN PERPENDICULARES.**

En este caso, suponemos que sobre el cuerpo actúan dos fuerzas, aplicadas en el centro del cuerpo, y que forman direcciones perpendiculares. La nueva fuerza tendrá la dirección de la diagonal del paralelogramo que forman ambas fuerzas y su módulo se calculará aplicando el Teorema de Pitágoras.



$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2$$

$$\boxed{F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}}$$

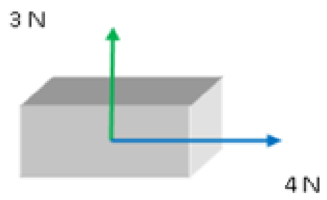
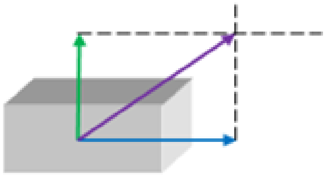
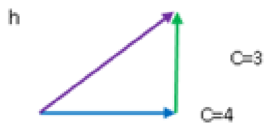


Figura 11.5: Suma de fuerzas cuyas direcciones son perpendiculares



Trasladando ahora el triángulo e identificando catetos e hipotenusas

Trasladando ahora el triángulo e identificando catetos e hipotenusas



$$h^2 = c_1^2 + c_2^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

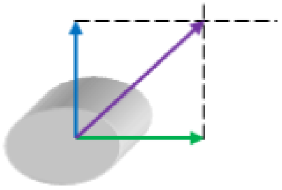
Luego h que coincide con la fuerza resultante, F, será 5 N

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Ejemplo:

Sobre un cuerpo actúan dos fuerzas perpendiculares iguales y de valor 5 N. Calcula y representa la fuerza resultante.

Representamos el objeto y dibujamos las fuerzas sobre él, haciendo los cálculos pertinentes a continuación.

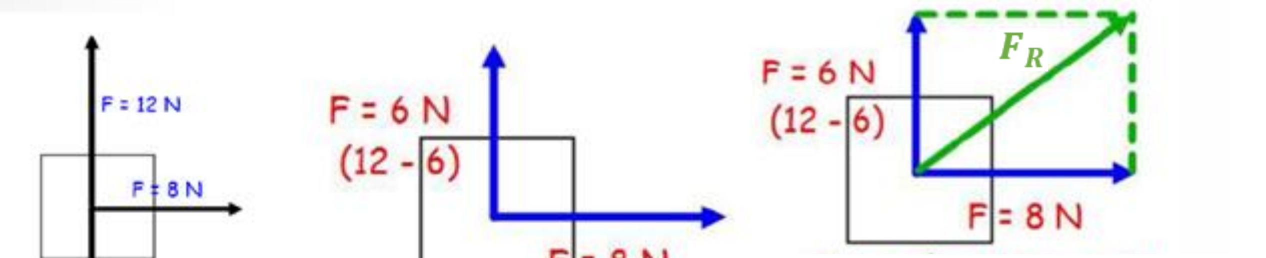


$$h^2 = c_1^2 + c_2^2 = 5^2 + 5^2 = 50$$

Luego F = 7,1 N

- **COMPOSICIÓN DE VARIAS FUERZAS**

En estos casos iremos con cuidado y paciencia, calculando las resultantes en cada dirección y sentido antes de aplicar la composición final.



$$F_R = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10\ N$$

6.4. LAS LEYES DE LA DINÁMICA

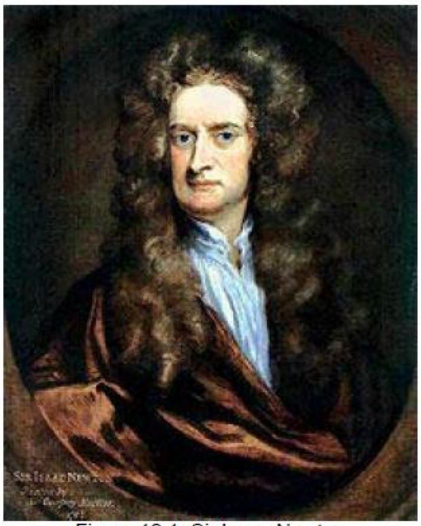


Figura 12.1: Sir Isaac Newton

La dinámica es la parte de la física que se encarga de estudiar los movimientos de los cuerpos sometidos a fuerzas. Fue Isaac Newton quien contribuyó especialmente al desarrollo de la dinámica, sintetizándola en tres leyes fundamentales.

6.4.1. CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Antes de enunciar las leyes de la dinámica es interesante entender algunos conceptos que la sustentan.

Imaginemos un cuerpo con una masa que llamaremos m, porque puede ser cualquier valor, y supongamos que ese cuerpo lleva una velocidad que a su vez llamaremos v. Definimos la ***cantidad de movimiento*** como el producto de la masa por la velocidad. La cantidad de movimiento se representa por la letra p. $\boxed{p = m \cdot v}$

Ejemplo:

Calcula la cantidad de movimiento de un camión de 8.000 kg que se mueve a 40 m/s y de una mosca de 20 miligramos.

Aunque la velocidad de ambos objetos es la misma, la cantidad de movimiento es diferente, debido a la masa.

La cantidad de movimiento del camión es:

$$p = m \cdot v = 8000 \cdot 40 = 320000 kg \frac{m}{s}$$

La cantidad de movimiento de la mosca es:

$$p = m \cdot v = 0{,}00002 \cdot 40 = 0{,}0008 kg \frac{m}{s}$$

Como vemos, la cantidad de movimiento no tiene una unidad específica. La cantidad de movimiento nos da una idea intuitiva del estado dinámico de la partícula y, de cuánto estado dinámico puede transferir a otro objeto o sistema con el que interactúe. En el ejemplo está claro que el camión transferirá más que la mosca.

6.4.2. SEGUNDA LEY DE LA DINÁMICA. LEY FUNDAMENTAL

Parece curioso que comencemos por la segunda, pero quizás resulte más fácil, porque la segunda ley es, en realidad, una definición. ***Definiremos la fuerza que actúa sobre un cuerpo como el producto de la masa del cuerpo por la aceleración que adquiere***. Si llamamos a la fuerza F, a la masa m y a la aceleración a, resulta.

$$\boxed{F = m \cdot a}$$

Sobre el dibujo entenderás mejor la definición de fuerza.

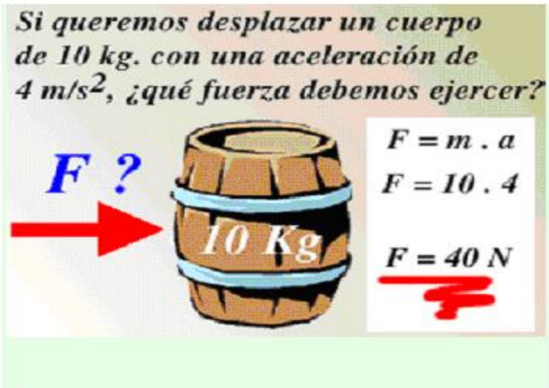


Figura 12.2: Ejemplo de cálculo de fuerza

Otra forma de definir la fuerza es como el cambio de la cantidad de movimiento en el transcurso del tiempo. Imagina que un instante de tiempo t_1 un cuerpo tuviera una cantidad de movimiento p_1y que sobre él actúa una fuerza, de tal forma que un instante de tiempo después t_2 la cantidad de movimiento es p_2. Entonces, se define la fuerza:

$$F = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1}$$

Ejemplo:

En un instante inicial, un cuerpo de masa 2 kg lleva una velocidad de 4 m/s. Como consecuencia de la actuación de una fuerza, comprobamos que 3 segundos después su velocidad ha cambiado hasta los 10 m/s. ¿Cuál es el valor de la fuerza que ha actuado sobre dicho cuerpo?

En el instante t = 0 s, la cantidad de movimiento es:

$$p_1 = m \cdot v_1 = 2 \cdot 4 = 8kg\frac{m}{s}$$

En el instante t = 3 s, la cantidad de movimiento es:

$$p_2 = m \cdot v_2 = 2 \cdot 10 = 20kg\frac{m}{s}$$

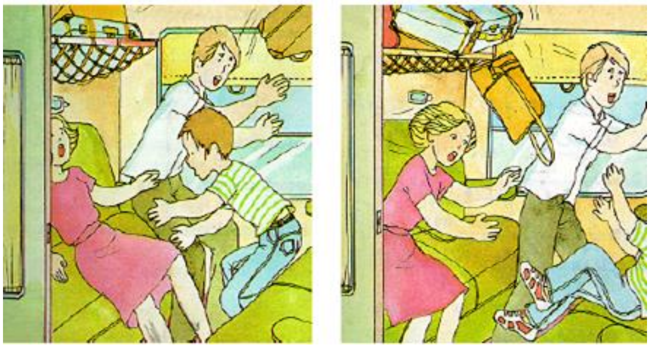
La fuerza será por tanto:

$$F = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} = \frac{20 - 8}{3 - 0} = \frac{12}{3} = 4N$$

Una consecuencia que se deduce rápidamente es que, si no existe fuerza, si esta vale cero, el valor de p no cambia. Esto se conoce como ***principio de conservación de la cantidad de movimiento***: en ausencia de fuerza, la cantidad de movimiento permanece constante. Es una de las leyes más importante de la física.

6.4.3. PRIMERA LEY DE LA DINÁMICA O LEY DE LA INERCIA

"Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza, éste continúa en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme".



Quiere decir que si un cuerpo está parado y sobre él no actúa fuerza alguna, permanecerá siempre en ese estado de reposo; por otra parte, si un cuerpo se mueve linealmente con una velocidad constante y sobre él no actúa ninguna fuerza, continuará moviéndose perpetuamente con la misma velocidad.

Podemos notar el principio de inercia al arrancar y al detenernos, por ejemplo, cuando estamos subidos en un autobús. Nuestro cuerpo tiende a permanecer en el estado de movimiento en el que estaba, en reposo en el primer caso, al arrancar, y en movimiento en el segundo, al detenerse.

¿Cuál es entonces la causa de que los objetos se detengan en nuestra experiencia cotidiana? La causa es la existencia de una fuerza que se opone al movimiento, la fuerza de rozamiento. Si no existiese esta fuerza, como sucede en el espacio exterior, el cuerpo no se detendría.

Inercia: es la propiedad que tienen los cuerpos de permanecer en su estado de reposo o movimiento.

6.4.4. TERCERA LEY DE LA DINÁMICA: PRINCIPIO DE ACCIÓN REACCIÓN.

"Cuando un cuerpo actúa sobre otro realizando una fuerza, el segundo realiza una fuerza igual y opuesta sobre el primero"

Esto supone que las fuerzas aparecen siempre en parejas. A una de ellas se le llama acción y a la otra, reacción.

7. ESTÁTICA. MAGNITUDES ASOCIADAS A LA ESTÁTICA: PESO DE UN CUERPO, MOMENTO DE LAS FUERZAS Y PRESIÓN.

7.1. LA ESTÁTICA

La estática es la parte de la física que estudia las fuerzas cuando existe equilibrio entre ellas. Decimos que un cuerpo está en equilibrio cuando está en reposo o se mueve con movimiento uniforme. Para que un cuerpo esté en equilibrio es necesario que la fuerza resultante de todas las fuerzas sea nula.

Ejemplo:

Indica si los cuerpos de la figura se encuentran en equilibrio.

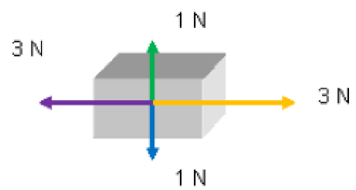


Figura 13.1: Cuerpo en equilibrio

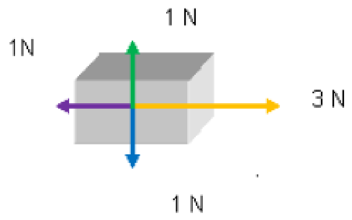


Figura 13.2: Cuerpo en situación de no equilibrio

Suma de fuerzas horizontales:	Suma de fuerzas horizontales:
3 - 3 = 0 N	3 - 1 = 2 N
Suma de fuerzas verticales:	Suma de fuerzas verticales:
1 -1 = 0 N	1 -1 = 0 N

Principios de la estática:

1. Una fuerza sola actuando sobre un cuerpo no produce equilibrio (caída libre de un cuerpo, sólo actúa la gravedad)
2. Dos fuerzas simultáneas, iguales y opuestas en la misma línea de acción producen equilibrio (dos equipos parejos en el juego de tirar de la soga)
3. En un cuerpo en equilibrio, cada fuerza es igual y opuesta a la resultante de las demás.

7.2. PESO DE UN CUERPO

El peso de un cuerpo es la fuerza con la que la Tierra atrae a ese cuerpo. Puede calcularse por la expresión.

$$\boxed{P = m \cdot g}$$

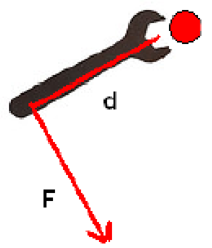
En esta expresión, m es la masa del cuerpo y g el valor del campo gravitatorio terrestre en la superficie de la Tierra. El valor de **g es 9,8 m/s²**; también se conoce como aceleración de la gravedad, por coincidir con la aceleración con la que cae un cuerpo en las proximidades de la superficie terrestre.

El peso de un cuerpo se mide en unidades del Sistema Internacional en **Newtons**, por tratarse de una fuerza.

¡Ojo! El "peso" que nos da la báscula no viene en Newtons, sino en otra unidad de fuerza llamada kilopondio (que numéricamente coincide con la masa en kilogramos) (***1 kp = 9,8 N***). Así, una persona de masa x kg pesará x kp

Por tanto, si una báscula nos dice que "pesamos" 140 kg, en realidad nuestro peso (que es una fuerza) en unidades del Sistema Internacional será de:

$$P = 140 \cdot 9{,}8 = 1372\ N$$



7.3. MOMENTO DE UNA FUERZA Y PAR DE FUERZAS

El efecto que realiza una fuerza sobre un cuerpo no tiene por qué ser el desplazar el cuerpo; también puede hacerlo girar. Por ejemplo, al hacer fuerza sobre una puerta esta gira.

También hemos comprobado que, según dónde apliquemos la fuerza, conseguimos que el cuerpo gire más fácilmente: por ejemplo, piensa en una llave inglesa que trata de hacer girar una tuerca; si realizamos la fuerza más cerca de la tuerca, debemos realizar una fuerza mayor para conseguir que la tuerca gire.

Existe una magnitud que nos indica la capacidad de giro de un objeto al que le ha aplicado una fuerza. Se llama ***momento de la fuerza*** y se representa por la letra **M**. La expresión del momento de la fuerza es:

$$\boxed{\boldsymbol{M} = F \cdot d}$$

Siendo F la fuerza aplicada y "d " la distancia desde donde se aplica la fuerza al eje de giro (radio del giro). El momento se mide en Newton por metro (N·m).

Sacamos los pernos apoyados en un par de fuerzas.

Se denomina ***par de fuerzas*** a un sistema formado por dos fuerzas paralelas iguales en módulo y de sentido contrario. Un par de fuerzas produce un efecto de rotación. El **momento del par** de fuerzas viene dado por la expresión:

$$M = F \cdot d$$

¡Ojo! En este caso, "d" es la distancia que separa ambas fuerzas y se denomina **brazo del par**.

Ejemplo:

Si queremos hacer girar una puerta, ¿cómo será más fácil, aplicando una fuerza de 5 N a una distancia de 30 cm del eje de giro u otra fuerza de 7 N a 20 cm del eje de giro?

Calculamos el momento en ambos casos:

Caso 1:

$$\mathrm{M} = \mathrm{F} \cdot \mathrm{d} = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5 N \cdot m$$

Caso 2:

$$\mathrm{M} = \mathrm{F} \cdot \mathrm{d} = 7 \cdot 0{,}2 = 1{,}4 N \cdot m$$

Luego girará mejor en el primer caso.

7.4. LA PRESIÓN

Cuando se ejerce una fuerza sobre una superficie, el efecto producido no depende únicamente de la intensidad de la fuerza aplicada, sino también de la superficie sobre la que ésta se aplica. Imaginemos que la misma persona nos da un pisotón de tres formas diferentes: (la fuerza peso es la misma)

Introducimos una nueva magnitud denominada presión. ***Se define presión como el cociente entre la fuerza aplicada y la superficie sobre la que se aplica la fuerza.***

Su unidad en el Sistema Internacional es el ***Pascal (Pa)***

$$\boxed{P = \frac{F}{S}}$$

Como puedes observar, a menor superficie de contacto y a idéntica fuerza, mayor es la presión (y en este caso, el dolor)

Ejemplo.

¿Qué presión ejercería una persona de 80 kg de masa si se apoyase sobre una superficie de 0,1 m^2? ¿Qué presión ejercería si se apoyase sobre una superficie 10 veces más pequeña? ¿Y si lo hiciese sobre una 10 veces mayor?

Aplicamos la expresión de la presión a los diferentes casos, teniendo en cuenta que la fuerza aplicada es el peso.

Primer caso:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{784}{0{,}1} = 7840\text{pascales}$$

Segundo caso:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{784}{0{,}01} = 78400\text{pascales}$$

Tercer caso:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{784}{1} = 784\text{pascales}$$

Podemos ver efectos de esto en el daño que nos produce el que alguien nos pise con tacones o en las raquetas de nieve que se usan para no hundirse en la nieve.

8. EFECTOS DE LAS FUERZAS SOBRE LOS MATERIALES. ESTRUCTURAS

Cuando un material está sometido a la acción de una o varias fuerzas se dice que está sometido a esfuerzos o tensiones. Si el esfuerzo fuera suficientemente grande, el material podría llegar a deformarse.

Tipos de **deformación:**

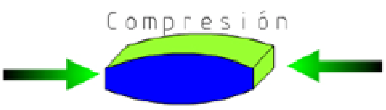
a. **Deformación plástica**: el esfuerzo deforma el material de forma definitiva.

b. **Deformación elástica**: el esfuerzo deforma el material, pero cuando cede el esfuerzo, el material recupera su forma inicial.

c. **Deformación frágil:** el material se fractura como respuesta al esfuerzo (sería el caso de un vidrio roto). Es irreversible.

Visítame: http://dpto.educacion.navarra.es/micros/tecnologia/estruc.htm

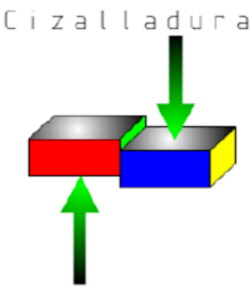
ESFUERZOS BÁSICOS:



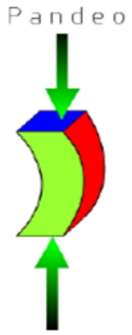
Compresión→ Las fuerzas ejercidas tratan de comprimir el elemento. Ejemplos: patas de una mesa, pilares de un edificio.

Flexión→ las fuerzas ejercidas tratan de doblar el elemento. Ejemplos: baldas de una estantería, vigas de un edificio, espalderas de un gimnasio.

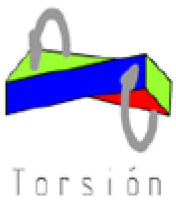
Tracción→ Las fuerzas ejercidas tratan de estirar el elemento. Ejemplos: goma elástica estirada, cuerda de un paracaídas, cadena de un péndulo.



Cizalladura → las fuerzas ejercidas tratan de cortar el elemento. También se llama esfuerzo cortante. Ejemplos: tijeras, guillotina.



Pandeo → Este esfuerzo es una combinación del esfuerzo de compresión y el esfuerzo de flexión. Aparece cuando las cargas no están centradas. Ejemplos: pilar descentrado, mástil de una tienda de campaña mal colocado.



Torsión→ Las fuerzas ejercidas tratan de retorcer el elemento. Ejemplos: fuerzas que soporta un destornillador, una llave al abrir una cerradura.

Dependiendo de su estructura molecular, cada material tiene una resistencia determinada a la deformación. Hay materiales que resisten mejor un determinado tipo de esfuerzo pero pueden resistir mal otras solicitaciones.

La relación entre el esfuerzo y la superficie de trabajo de un material se denomina tensión:

$\boxed{\sigma=\frac{F}{S}}$ **(N/m^2) (unidades del Sistema Internacional)**

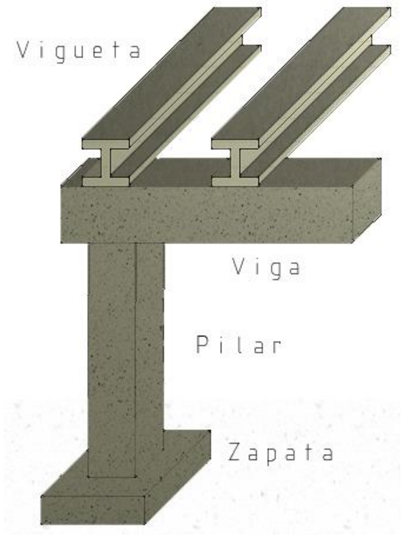
Ejemplo

Un cable de acero de 0.25 cm^2 de sección está sometido a un esfuerzo de 2000kg. La tensión que soporta ese cable es de 8000 kgf/cm^2 ($\sigma=\frac{F}{S}=\frac{2000kp}{0{,}25cm^2}=8000\ kgf/cm^2$) (1 kgf=9.8N /1$cm^2$=0.0001 m^2)

Esta tensión es llamada **tensión del trabajo** del material.

- Si la tensión está dentro de los márgenes de seguridad del material (es decir, que no se va a romper), se dice que está por debajo de la tensión admisible.

- Si el elemento que soporta esta tensión se rompe, se dice entonces que la tensión de trabajo está por encima de la tensión de rotura.

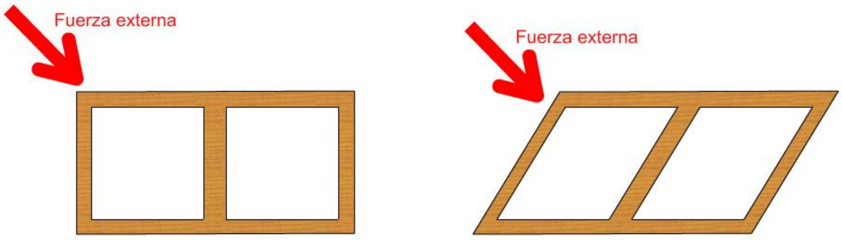


A continuación se observa una construcción básica actual, los pilares y las zapatas trabajan a compresión, mientras que las vigas y viguetas lo hacen a flexión. A la hora del uso de materiales de construcción a las piezas metálicas usadas se les llama **perfiles**. Cuando un determinado perfil es insuficiente para soportar una carga, se recurre a las estructuras.

ESTRUCTURAS

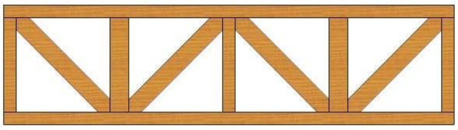
Son elementos resistentes a los esfuerzos y están formadas por módulos elementales unidos entre sí. Su objetivo es soportar las cargas o solicitaciones que se presenten sin romperse o deformarse en exceso. Deben ser estables, resistentes y rígidas.

Una estructura es **estable estáticamente** (no vuelca) si la proyección de su centro de gravedad cae dentro de la superficie de su base. Una estructura es **rígida** si los elementos que la forman no se deforman, o si lo hacen esta deformación no sea tal que el elemento constructivo deje de hacer la función para la que se diseñó.



Deformación. Estructura poco resistente

Para lograr que una estructura sea rígida se recurre a la **triangulación**, que no es otra cosa que la formación de la estructura por medio de triángulos o refuerzos con cartabones en determinados puntos de ella. A estas piezas interiores se llaman **arriostras**.



Triangulación de estructuras

TIPOS DE ESTRUCTURAS

Estructuras trianguladas: usan estructuras metálicas o de madera.

Ejemplo: Torre Eiffel, París.

Estructuras colgantes: se usan cables que soporten parte de los esfuerzos existentes. Estos cables se llaman **tirantes**, y si además son regulables se les llama **tensores.**

Ejemplo: Puente Lusitania, Mérida.

Estructuras abovedadas: usan el arco y la bóveda como elementos constructivos. Los arcos se construyen con piezas llamada **dovelas**, que trabajan a compresión dentro de la estructura. La pieza central se llama **clave**.

Ejemplo: Catedral de Salamanca.

Estructuras laminares: se fabrican con láminas finas de distintos materiales, desde hormigón a fibras plásticas.

Ejemplo: Ciudad de las Ciencias, Valencia.

Refuerza las estructuras en: www.ieslosalbares.es/tecnologia/Estructuras/tipos_de_esfuerzos.html

PLASTICIDAD, ELEASTICIDAD Y FRAGILIDAD. LEY DE HOOKE

Si miras a tu alrededor, observarás que hay materiales cuya forma permanece constante, a menos que realicemos alguna acción sobre ellos: esos materiales los hemos denominados **sólidos**.

Cuando aplicamos una fuerza sobre un sólido, éste modifica, en mayor o menor medida, su forma y su volumen, produciéndose una **deformación**.

Materiales elásticos. Se deforman, pero recuperan su forma incial cuando el esfuerzo cesa; esto es lo que sucede, por ejemplo, cuando estiramos una goma.

Materiales plásticos o dúctiles. Se deforman, pero no recuperan su forma inicial cuando cesa el esfuerzo; es el caso de una alambre, la arcilla húmeda o la plastilina.

Materiales rígidos o frágiles. No se deforman o se deforman elásticamente si el esfuerzo supera un límite, se rompen; un ejemplo la madera.

RELACIÓN ENTRE LA FUERZA APLICADA Y LA DEFORMACIÓN PRODUCIDA

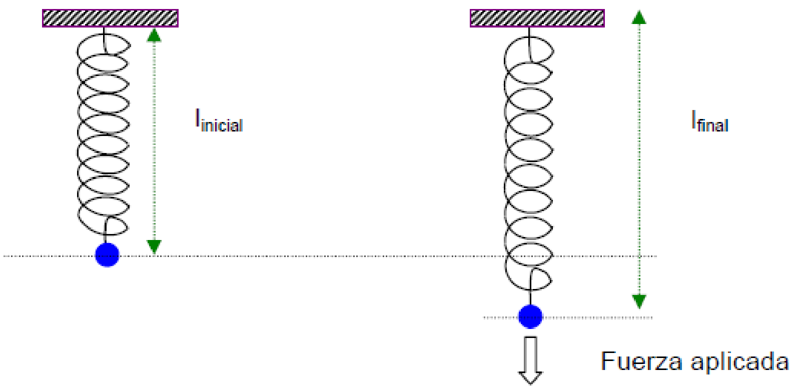
En los cuerpos elásticos, como un resorte o un muelle, se cumple que la deformación producida es proporcional a la fuerza que los deforma. Esto quiere decir que si la fuerza aumenta, la deformación también aumenta; y al contrario.

La ley que expresa esta propiedad se denomina **ley de Hooke**. La relación entre la fuerza que aplicamos y la deformación es una constante que depende de la forma que tiene el resorte, del material del que está hecho, etcétera.

La expresión matemática de la ley de Hooke es:

$$\boxed{F = K \cdot (l_{final} - l_{inicial})}$$

Donde "*l*" es la longitud, inicial y final, del muelle que se estira debido a la fuerza.



Veamos un ejemplo.

Si la longitud de un muelle de constante $k = 0.1\dfrac{N}{cm}$ es de 10 cm y sobre él aplicamos una fuerza de 20 N, ¿cuál será la longitud final del muelle?

Lo primero que hay que darse cuenta es que las unidades sean coherentes, es decir, si la constante k está dada en cm/N, la longitud también deberá venir en cm y la fuerza en newtons. Como éste es el caso no hay que hacer ninguna transformación de unidades.

Aplicamos ahora la ley de Hooke y despejamos:

$$F = k \cdot (l_{final} - l_{inicial})$$

$$20 = 0{,}1 \cdot (l_{final} - 10)$$

Laboratorio virtual

Luego:

$$(l_{final} - 10) = \frac{20}{0{,}1} = 200$$

Despejando la longitud final:

$$l_{final} = 200 + 10 = 210\text{cm}$$

Visítame: http://www.educaplus.org/game/ley-de-hooke

GRÁFICA ESTIRAMIENTO FRENTE A FUERZA APLICADA

Podemos representar gráficamente la ley de Hooke. Si llamamos, por simplificar,

$$\text{L} = (l_{final} - l_{inicial})$$

La ley quedaría:

$$F = k \cdot L$$

Donde k es, como ya hemos dicho, una constante. Si representamos F frente a L, resulta una función lineal.

Podemos comparar su semejanza con la expresión general de las funciones lineales:

Ley de Hooke → $F = k \cdot L$

Forma general → y= a · x

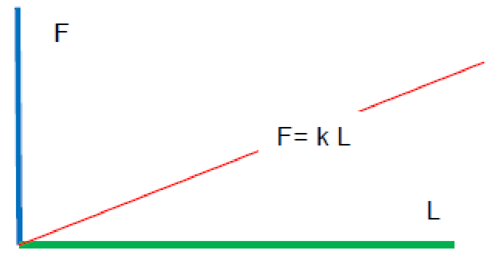
En este caso, F juega el papel de y; k el papel de la constante a; L el papel de x. Es también similar a la expresión de un movimiento uniforme, donde la velocidad es constante y cuya forma es:

e=v·t

La velocidad v es la constante, al igual que k. El espacio varía a medida que pasa el tiempo, al igual que la longitud, L, cambia a medida que la fuerza varía. Las constantes indican lo inclinado de la función (su pendiente).

Para un muelle de constante $k = 0.1\frac{N}{cm}$, podemos construir la siguiente tabla, sustituyendo en la expresión de la ley de Hooke.

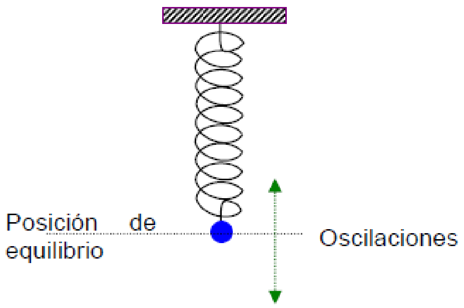
L	10 cm	20 cm	30 cm	40 cm
F	1 N	2 N	3 N	4 N



MOVIMIENTO DE UN CUEPRO SOMETIDO A LA LEY DE HOOKE

Si estiramos un muelle aplicando una fuerza y lo soltamos, observamos que empieza a oscilar alrededor de la posición de equilibrio que tenía antes de aplicar la fuerza.

A los movimientos que alcanzan posiciones simétricas respecto de la posición inicial de equilibrio los llamaremos **vibratorios**. A la máxima distancia que el cuerpo alcanza en sus oscilaciones se le denomina **amplitud**.



El número de vibraciones que realiza en un segundo el muelle o el objeto a él unido se le llama **frecuencia**.

Si representamos por la letra f la frecuencia y por N el número de vibraciones, la expresión matemática de la frecuencia de un movimiento vibratorio es:

$$\boxed{f \quad \frac{N}{segundo}}$$

Por ejemplo, si un muelle realiza 50 oscilaciones alrededor de su punto de equilibrio en un segundo su frecuencia es 50.

La unidad de frecuencia es el **hertz** (Hz). En el caso anterior, decimos que la frecuencia es de 50 Hz.

Unidad 1. Ficha 1: Expresiones algebraicas. Polinomios

1. Expresa en lenguaje algebraico cada uno de los siguientes enunciados:
   a. El 30% de un número.
   b. El área de un rectángulo de base 3 cm y altura desconocida.
   c. El perímetro de un rectángulo de base 3 cm y altura desconocida.
   d. El doble del resultado de sumarle a un número entero su siguiente.

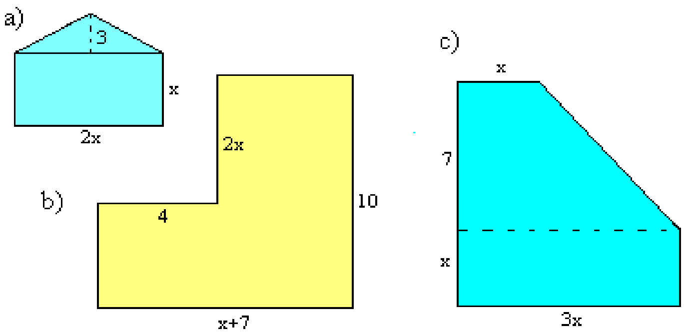
2. Traduce al lenguaje algebraico las siguientes expresiones:
   a. El triple del resultado de sumar un número con su inverso.
   b. El doble de la edad que tendré dentro de cinco años.
   c. El quíntuplo del área de un cuadrado de lado *x*.
   d. El área de un triángulo del que se sabe que su base es la mitad de su altura.

3. Realiza las siguientes operaciones con monomios:
   a. $2x - 3x + 4x - 5x =$
   b. $6x - 3x^2 + 2x + 4x^2 =$
   c. $-3x \cdot 2x^2 =$
   d. $2x \cdot (4x - 2) =$

4. Opera con los siguientes polinomios y reduce el resultado y ordena de mayor a menor grado.
   a. $(2x^2 - 3x + 5) + (-3x^2 - x - 7) =$
   b. $(3x - 1)\cdot(2 - x) =$
   c. $(2x^2 - 3x + 1)\cdot(2x - 8) =$

5. Desarrolla las siguientes igualdades notables:
   a. $(x + 1)^2 =$
   b. $(2x - 3)^2 =$
   c. $(5x + 4)\cdot(5x - 4) =$

6. Expresa mediante un polinomio el área de cada una de las figuras que se dan a continuación:



7. Calcula el valor de las áreas del ejercicio anterior para el caso particular $x=5$ cm.

8. Una piscina rectangular está rodeada por un pasillo enlosado de 1,5 m de ancho. Si la piscina es 10 m más larga que ancha, halla:
    a. La expresión que da el área del rectángulo que delimita la piscina.
    b. La expresión que da el área del pasillo enlosado.

Soluciones

1.- a) $0{,}3x$ b) $3x$ c) $2x+6$ d) $4x+2$	2.- a) $3(x+1/x)$	b) $2(x+5)$	c) $5x^2$ d) $x^2/4$
3.- a) $-2x$ b) $8x+x^2$ c) $-6x^3$ d) $8x^2-4x$	4.- a) $-x^2-4x-2$	b) $-3x^2+7x-2$	c) $4x^3-22x^2+26x-8$
5.- a) x^2+2x+1 b) $4x^2-12x+9$ c) $25x^2-16$	6.- a) $2x^2+3x$	b) $2x+70$	c) $3x^2+14x$
7.- a) 65 cm^2 b) 80 cm^2 c) 145 cm^2	8.- a) x^2+10x	b) $6x+39$	

Unidad 1. Ficha 2: Ecuaciones de primer grado. Problemas

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones sin paréntesis:

a) $2x = 8$ *b)* $2+x = 8$ *c)* $3x-x = 12-6$ *d)* $4x+5 = x-4$ *e)* $2x-5-3x = 8-5x+3$

2.- Resuelve las siguientes ecuaciones con paréntesis:

a) $3(x+2) = 16+6x$ *b)* $6-5(x-2) = 2x+3(4x-1)$ *c)* $7x-16 = 4(3-2x)+2$

3.-) Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores:

a) $\frac{x}{3}+x=\frac{4-x}{2}+\frac{1}{4}$ b) $\frac{2(x-3)}{7}=\frac{6+x}{3}$ c) $\frac{4x}{3}-\frac{3x}{2}+7=5$

4.- Halla dos números sabiendo que el primero es 12 unidades mayor que el segundo; pero que, si restáramos 3 unidades a cada uno de ellos, el primero sería el doble del segundo.

5.- Halla los lados de un rectángulo, sabiendo que la base es 5 unidades mayor que el doble de la altura, y que su perímetro es de 28 cm.

6.- Dos ciudades, A y B, distan 120 km. De la ciudad A sale un autobús hacia B a una velocidad de 70km/h. Al mismo tiempo, sale un coche de B hacia A, a una velocidad de 90 km/h. Calcula el tiempo que tardan en encontrarse y a qué distancia de A se produce el encuentro.

7.- Si a la mitad de un número le restas su tercera parte, y, a este resultado, le sumas 85/2, obtienes el triple del número inicial. ¿De qué número se trata?

8.- Un ordenador y su funda cuestan 900 €. Si el ordenador cuesta 800 € más que la funda, ¿cuánto cuesta el ordenador?

9.- Disponemos de dos tipos de líquido de 0,8 €/litro y de 1,2 €/litro, respectivamente. Mezclamos 13 litros del primer tipo con cierta cantidad del segundo tipo, resultando el precio de la mezcla a 1,1 €/litro. ¿Cuántos litros de líquido del segundo tipo hemos utilizado?

Soluciones				
1) a)4 b)6 c)3 d)-3 e) 4	**2)** a)-10/3 b)1 c)2	**3)** a)27/22 b)-60 c) 12	**4)** 15, 27	**5)** 11, 3
6) 52,5 km de A 45 min	**7)** 15	**8)** 850 €	**9)** 39 litros	

Unidad 1. Ficha 3: Ecuaciones de segundo grado.

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas:

a) $3x^2 - 147 = 0$ b) $-2x^2 = 3x$ c) $-2x^2 + 128 = 0$ d) $3x^2+x = 0$

2.- Resuelve las siguientes ecuaciones con la fórmula general.

a) $3x^2 + x - 2=0$ b) $-4x^2 + 12x - 9 = 0$ c) $x^2 + x - 2 = 0$ d) $2x^2 - 20x + 60 = 0$

3.- Halla un número entero sabiendo que si multiplicamos su anterior por el mismo obtenemos 240.

4.- Halla las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que la base mide 9 cm más que la altura y que la diagonal mide 18 cm.

5.- Para poner el suelo del paseo de la Plaza de España en Zafra, se han empleado 80.000 baldosas cuadradas en un rectángulo de 40 m de ancho por 320 m de largo. ¿Cuál es la longitud, en centímetros, del lado de esas baldosas?

6.- Averigua el número de habitantes que tiene la aldea de El Carrascalejo (Badajoz) sabiendo que el número de hombre supera en uno al número de mujeres y que el producto de ambas cantidades es de 342.

Soluciones			
1) a) +7,-7 b) 0, -3/2 c) +8, -8 d) 0, -1/3			2) a) -1, 2/3 b) 3/2 c) 1,-2 d) No tiene
3) +16, -15	4) 7,4 cm, 16,4cm	5) 40 cm	6) 37 habitantes

Unidad 1. Ficha 4: Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

1.- Resuelve estos sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ 4x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x - 7y = 15 \\ x + 6y = -5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$

2.- Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \dfrac{x-3}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + y = 8 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -2 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$

3.- Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 4x + 3y = -2 \end{cases}$

4.- Dos de los siguientes sistemas tienen solución única, uno de ellos es incompatible (no tiene solución) y otro es indeterminado (tiene infinitas soluciones). Intenta averiguar de qué tipo es cada uno, simplemente observando las ecuaciones. Después, resuélvelos gráficamente para comprobarlo:

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - x = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$

5.- Cuatro barras de pan y seis litros de leche cuestan 6,8 €; tres barras de pan y cuatro litros de leche cuestan 4,7 €. ¿Cuánto vale una barra de pan? ¿Cuánto cuesta un litro de leche?

6.- La suma de dos números es 15. La mitad de uno de ellos más la tercera parte del otro es 6. ¿De qué números se trata?

7. Por una calculadora y un cuaderno habríamos pagado, hace tres días, 10,80 €. El precio de la calculadora ha aumentado un 8%, y el cuaderno tiene una rebaja del 10%. Con estas variaciones, los dos artículos nos cuestan 11,34 €. ¿Cuánto costaba cada uno de los artículos hace tres días?

8. En una cafetería utilizan dos marcas de café, una de 6 €/kg y otra de 8,50 €/kg. El encargado quiere preparar 20 kg de una mezcla de los dos cuyo precio sea 7 €/kg. ¿Cuánto tiene que poner de cada clase?

9. La distancia entre dos ciudades, A y B, es de 400 km. Un coche sale desde A hacia B a una velocidad de 90 km/h. Simultáneamente, sale otro coche desde B hacia A a 110 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse? ¿A qué distancia de A se producirá el encuentro?

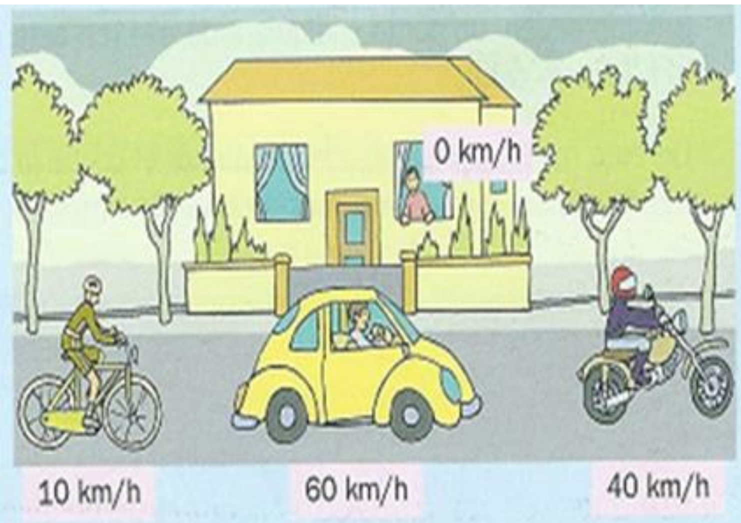
10. El perímetro de un rectángulo es de 20 cm, y su área, de 21 cm^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

11. Si acortamos en 2 cm la base de un rectángulo y en 1 cm su altura, el área disminuye en 13 cm2. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que su perímetro es de 24 cm.

1. a)(0,-1) b)(1,-1) c)(2,-1) d)(1, 1/2)	2.a)(1,-1) b)(1, 3) c)(0,-1/3) d)(2, 2)	3.a)(1, ½) b)(1/2, 2) c)(2, -1) d)(17/23, -38/23)	5.(0'5, 0'8)	6. (6, 9)
7. 9€ 1'8€	8. 8 kg, 12 kg	9. e=180 km, t=2h	10. (7, 3) cm	11. (9, 3) cm

Unidad 1. Ficha 5. Caracterización del movimiento. Concepto de velocidad.

1. El estado de reposo o movimiento depende del sistema de referencia que utilicemos.
Esta chica (Ana) ve pasar un tren, en su interior van dos amigos, Pedro y Luis, sentados en un vagón. Explique el estado de reposo o movimiento de cada uno de ellos con respecto a los demás.



Actividad obtenida de :
BIOLOGÍA Y GEOLOGÍA. 2ºESO. Ed. Anaya.2008
S. BALIBREA, A.ÁLVAREZ, A. SÁEZ, M.REYES, J.M.VILCHEZ

2. La misma situación de reposo y movimiento puede ser descrita de modo diferente por distintos observadores. Fíjate en la ilustración y supón que tú eres la persona que están en el coche y describes lo que ves del siguiente modo:

- Mi coche está en reposo.
- El ciclista se aleja de mí a 50 km/h.
- La persona que está asomada a la ventana pasa a mi lado a 60 km/h.
- El motorista se acerca a mí a 20 km/h.

Repite la descripción de lo que ves:

a) Si tú eres la persona de la ventana.
b) Si tú eres el motorista.
¿Cuál de las tres descripciones es correcta?¿Por qué?

3. Cuando viajamos por carretera y nos adelanta otro coche, tenemos la sensación de que lo hace muy lentamente, a pesar de que circulemos a bastante velocidad. Explica lo que ocurre en esta situación.
4. Expresa en m/s las siguientes velocidades: 108 km/h, 120m/min, 180 km/min.
Solución: (30 m/s, 2 m/s, 3000 m/s respectivamente)

5. Cuando vemos esta señal, sabemos que está prohibido circular a velocidades superiores a 30km/h, ¿tendría problemas un vehículo que circulara a la misma velocidad que un velocista que es capaz de recorrer 200m en 20 segundos?
(**Solución.** 36 km/h. Podría ser multado**)**

6. El último clasificado en una prueba de 100 metros lisos realizó una marca de 10 s. Calcula la velocidad media y exprésala en km/h. (**Solución.** v=10 m/s (36 km/h)
7. Calcula la velocidad que lleva un coche si recorre 240 km en 3 horas.
8. Un avestruz recorre 60 km en una hora y media. ¿Qué velocidad lleva? Expresa la velocidad en km/h y en el SI m/s.
9. Calcula la aceleración de un avión al despegar si pasa de 0 m/s a 300 m/s en 15 segundos.

__Soluciones__

7.- v= 80 km/h	8.- v=40 km/h =11,11m/s	9.- a= 20 m/s^2

Unidad 1. Ficha 6: Movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.)

Tiempo (s)	Posición (m)
0	0
5	100
10	300
15	300
20	400
25	500
35	0

1.- Resuelva el siguiente ejercicio en base a la tabla mostrada:

a) Trace una gráfica posición vs tiempo.

b) Calcule la distancia total

c) Calcule el desplazamiento total

d) Calcule la velocidad en los primeros 5 segundos

e) Calcule la velocidad en el periodo de 15 a 25 segundos

2.- ¿Cuánto tiempo tardará en completar la distancia de una maratón (42 km) si corre a una velocidad media de 15 km/h? (Solución: 2,8 h)

3.- Un avión vuela a una velocidad de 900 km/h. Si tarda en viajar desde Canarias hasta la península 2 horas y media, ¿qué distancia recorre en ese tiempo? (Solución: 2250 km)

4.- El record del mundo de 100 metros lisos está de 9 segundos. ¿Cuál es la velocidad media del atleta? Exprésala en km/h. (Solución 40 km/h)

5.- Un coche se mueve durante 30 minutos a 40 km/h; después se mueve a 60 km/h durante la siguiente hora. Finalmente durante 15 minutos circula a 20 km/h. ¿Qué distancia total habrá recorrido? Calcula la posición del vehículo al final de cada tramo. (Solución: Tramo 1=20km /tramo 2=80km /tramo3=85km)

6.- Calcula la distancia que recorre un corredor que va a una velocidad de 5 m/s durante un cuarto de hora. (Solución: 4500m)

7.- Calcula el tiempo que tarda en llegar a la Tierra la luz del Sol si viaja a 300.000 km/s sabiendo que la distancia del Sol a la Tierra es de 150.000.000 km. Exprésalo en minutos. (Sol: 500s (8,33min))

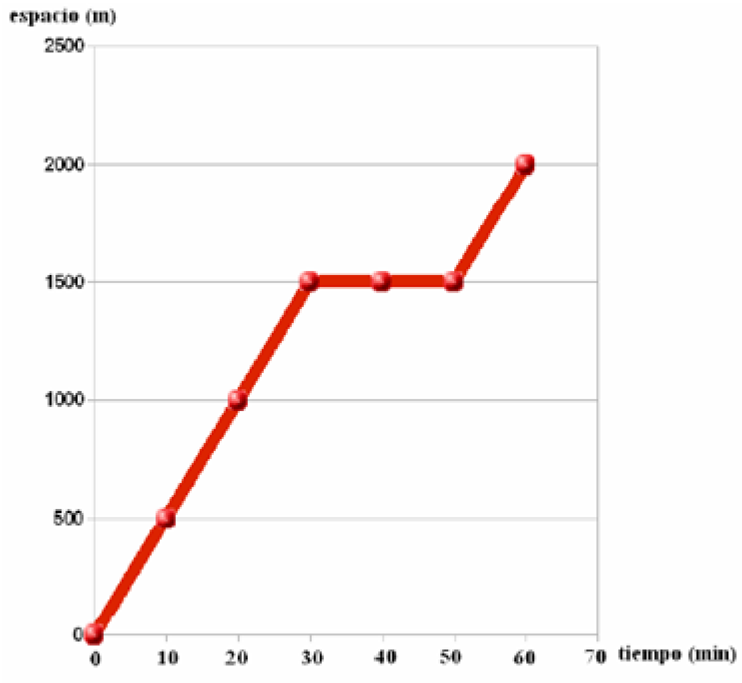
8.- Calcula las velocidades medias en km/h y m/s de cada una de las siguientes situaciones: a) Una persona que camina 20 km en 4 horas. b) Una gacela que recorre 10 km en 6 minutos. c) Un atleta que recorre 100 metros en 11 segundos. (Solución: a)1,39m/s b)27,78m/s c)32,73 km/h)

9.- Dibuja la gráfica del movimiento de una persona que camina a 4 km/h durante 15 minutos.

10.- Realiza la gráfica s-t de un móvil que describe el siguiente movimiento: Durante los dos primeros segundos se desplaza a una velocidad de 2 m/s; Los siguientes 4 segundos permanece parado. Después de la parada vuelva al sitio del que ha salido tardando 4 segundos.

MÁS ACTIVIDADES

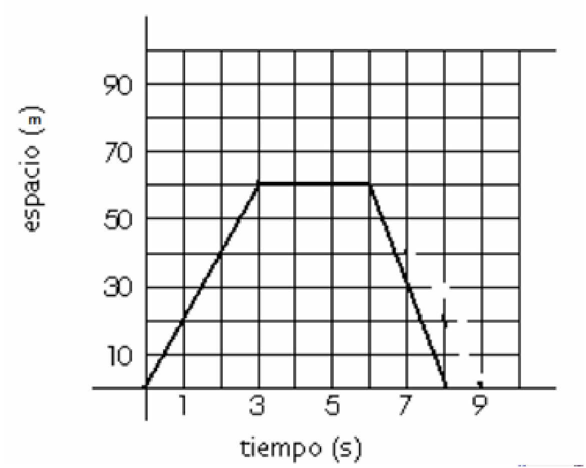
11. Una señora de 48 años que padece sobrepeso, en una visita médica recibe la recomendación de pasear todos los días durante una hora y tomar una dieta equilibrada. En el siguiente gráfico se observa el recorrido de esta persona:



a. ¿Cuál ha sido la velocidad de esta señora en m/s en cada uno de los tres tramos?
b. Indique el tipo de movimiento que ha tenido cada tramo.

12. La gráfica adjunta representa el movimiento de un cuerpo.

a. Calcule la rapidez en cada etapa del movimiento.
b. Indique el tipo de movimiento en cada tramo.



UNIDAD 1. FICHA7. Problemas del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A.)

1) Un cohete parte del reposo con aceleración constante y logra alcanzar en 30 s una velocidad de 588 m/s. Calcular:

a) Aceleración.

b) ¿Qué espacio recorrió en esos 30 s?

2) Un móvil que se desplaza con velocidad constante aplica los frenos durante 25 s y recorre 400 m hasta detenerse. Calcular:

Necesita sistema de ecuaciones.

a) ¿Qué velocidad tenía el móvil antes de aplicar los frenos?

b) ¿Qué desaceleración produjeron los frenos?

3) Un móvil parte del reposo con una aceleración de 20 m/s^2 constante. Calcular:

a) ¿Qué velocidad tendrá después de 15 s?

b) ¿Qué espacio recorrió en esos 15 s?

4) Un automóvil que viaja a una velocidad constante de 120 km/h, tarda 10 s en detenerse. Calcular:

a) ¿Qué espacio necesitó para detenerse?

Necesita sistema de ecuaciones

b) ¿Con qué velocidad chocaría a otro vehículo ubicado a 30 m del lugar donde aplicó los frenos?

5) Un objeto se lanza hacia arriba desde lo alto de un edificio de 200m de alto con una velocidad de 30m/s. El objeto sube, se detiene y luego cae hasta el suelo, al pie del edificio. Calcular:

a) La altura máxima que alcanza.

b) El tiempo que tarda en llegar al suelo.

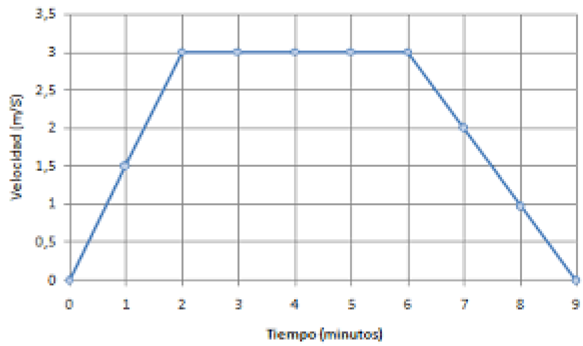
c) La velocidad con la que llega.

6) Observa la siguiente gráfica velocidad-tiempo y contesta a las siguientes preguntas:

a) Identificar el tipo de movimiento en cada tramo.

b) La aceleración en cada tramo

c) El espacio total recorrido.



7. Desde lo alto de una torre de 20 m dejamos caer una piedra de 0.5 kg. Aproximando el valor de g a 10 m/s^2. Calcula la velocidad un instante antes de tocar el suelo.

8. Desde lo alto de un edificio se deja caer una piedra y se observa que tarda 4 s en llegar al suelo. Determinar:

a) La altura del edificio.

b) La velocidad con que la piedra llega al suelo.

9. En esta imagen vemos dos hojas de papel, con una de ellas hemos hecho una bola mientras que con la otra no. Si dejamos caer:

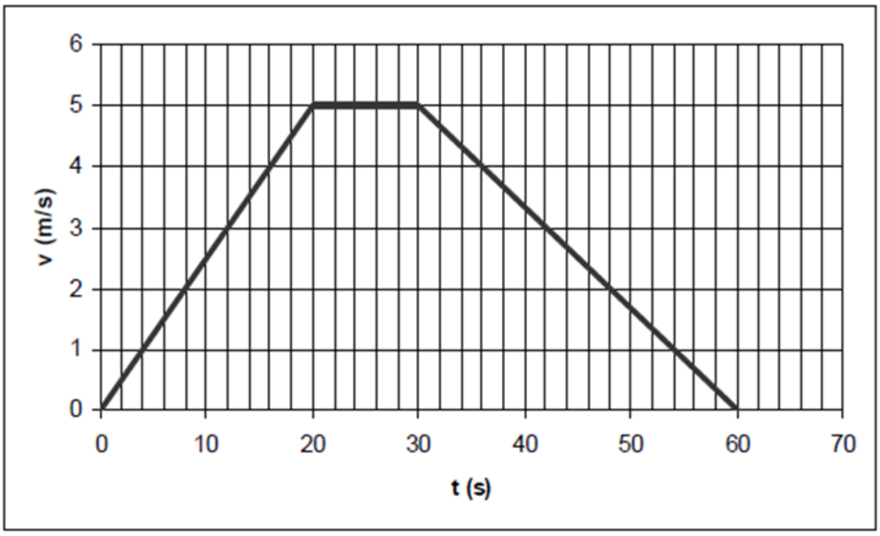
a. ¿Cuál caerá antes?

b. Explica el motivo.

Soluciones					
1. a) 19,6 m/s^2 b) e= 8.820 m	2. a) v_o= 32 m/s a=-1,28 m/s^2	3. a) v_f=300 m/s b) e=2250 m	4. a)e=166,83 m b) vf=109,7km/h	5. a) 45,92 m b)10,14 s c) 69,40 m/s	6. b) 0,025 m/s^2, 0 m/s^2 -0,017 m/s^2 c) 1170m d) 2,17 m/s
7. Vf=20m/s	8. h=80m Vf=40m/s				

MÁS ACTIVIDADES

10. Un determinado movimiento rectilíneo obedece al siguiente gráfico:



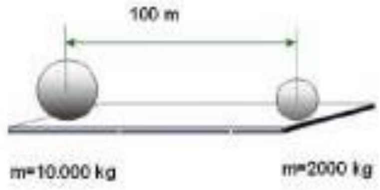
a. Interprete cada etapa de la gráfica, calculando su aceleración y el tipo de movimiento que realiza.

b. Calcule el espacio recorrido en cada etapa y el recorrido en total.

c. Calcule la velocidad media del móvil en todo el trayecto. Exprésela en km/h

Unida 1. Ficha 8: Las fuerzas. Estática.

1.- Calcula la fuerza con la que se atraen las siguientes esferas de las figura.



2.- Calcula la fuerza con la que se atraen la Tierra y la Luna.

(Datos: M_{Tierra}=5'972·10^{24} kg; m_{Luna}=7'34·10^{22} kg; $Distancia_{Tierra-Luna}$= 384.400 km)

3.- Dibujar los siguientes pares de fuerzas concurrentes actuando sobre un cuerpo.

a) Del mismo sentido y dirección y de módulo una el triple que la otra.

b) De la misma dirección, sentido contrario y de módulo una el doble que la otra.

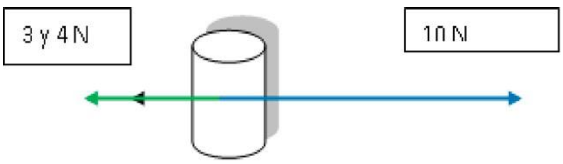
c) De dirección perpendiculares, de sentido una hacia el norte y otra hacia el oeste y de módulos iguales.

d) De direcciones perpendiculares, de sentido una hacia el sur y otra hacia el este y de módulos, la de sentido hacia el este, el doble que la otra.

4.- Sobre un camión actúa dos fuerzas una la del motor de 20.000 N y la del rozamiento sobre las ruedas de 5000N. Calcula la fuerza aplicada sobre el camión.

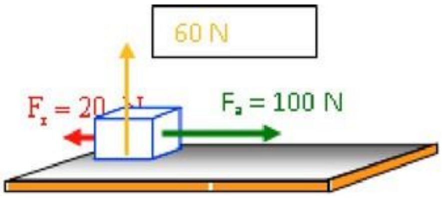
5.- Calcula la distancia a la que están separados dos cuerpos de masas iguales de 100 kg, si se atraen con una fuerza de 5·10^{-8} N.

6. Calcula la fuerza resultante de la figura.



7.- En la siguiente figura la mano soporta dos pesas de 5 kg cada una. Si cada una ejerce una fuerza de 49 N, ¿qué fuerza total ejerce la mano?

8.- Dado el sistema de fuerzas de la figura averigua la fuerza resultante. Dibújala.



9.- Sobre la proa de un barco dos cuerdas que forman un ángulo de 90° tiran con una fuerza de 100 N. Averigua la fuerza resultante con la que el barco es arrastrado y dibújala.

SOLUCIONES			
1) $1{,}33 \cdot 10^{-7}$ N	2) $1{,}98 \cdot 10^{20}$ N	4) 15.000 N	5) 3,65 m
6) 3 N	7) 98 N	8) 100 N	9) 141,42 N

UNIDAD 1: FICHA 9. FUERZAS. DINÁMICA

1.- Indica cuál es la opción correcta: "Dados dos cuerpos que tienen la misma masa...

a) Ambos tienen la misma cantidad de movimiento.

b) El de menor masa tiene mayor cantidad de movimiento.

c) El que lleva mayor velocidad tiene mayor cantidad de movimiento.

d) El que lleva menor velocidad tiene mayor cantidad de movimiento.

2.- **Si aplicamos una fuerza de 10 N sobre una masa de 2 kilogramos:**

a) Adquiere una aceleración de 5 m/s^2.

b) Adquiere una aceleración de 20 m/s^2.

c) Adquiere una velocidad de 5 m/s.

d) Adquiere una velocidad de 10 m/s.

3.- Un cuerpo que se mueve con velocidad constante:

a) No se detendrá nunca.

b) Se detendrá debido al rozamiento.

c) Aumentará su velocidad como consecuencia de la inercia.

d) Se detendrá como consecuencia de la inercia.

4.- Si colgamos un jamón de una cuerda de forma que quede estable, el peso del jamón es:

a) Menor que la tensión de la cuerda, según la tercera ley.

b) El doble que la tensión de la cuerda, según la segunda ley.

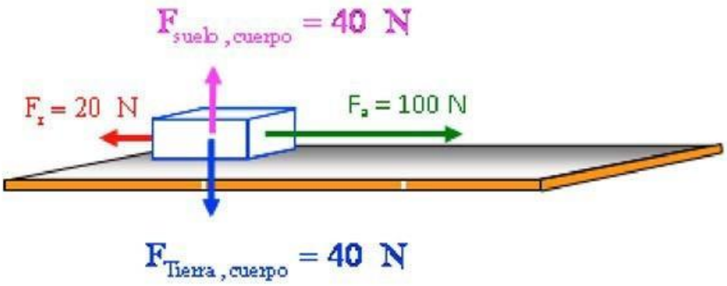
c) Igual que la tensión de la cuerda, según la primera ley.

d) Igual que la tensión de la cuerda, según la tercera ley.

5.- Calcula la fuerza que actúa sobre un cuerpo de masa 10 kg que adquiere una aceleración de 5 m/s2. Si el cuerpo estaba parado en un primer momento, ¿qué cantidad de movimiento habrá adquirido si la fuerza ha actuado 2 segundos?

6.- **Razonar sobre la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación. “Un cuerpo que no tiene aceleración no experimenta la acción de ninguna fuerza.**

7.- En el esquema de la figura, calcula la aceleración del cuerpo, supuesta una masa de 4 kg.



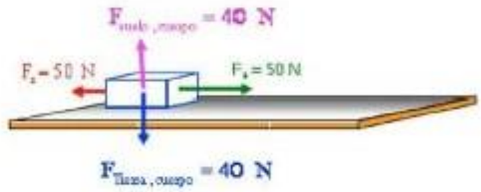
8.- Sobre un cuerpo de masa 2 kg, que se mueve con velocidad de 10 m/s, actúa una fuerza de frenado que disminuye su velocidad en 5 segundos hasta los 2 m/s. Calcula el valor de dicha fuerza y la aceleración de frenada.

9.- Calcula la fuerza que debemos hacer para detener un cuerpo de 1.000 kg de masa que se mueve con una velocidad de 20 m/s en 10 s.

Soluciones			
5)F=50 N p=100 kg·m/s	7) a=20 m/s	8) a=-1,6 m/s^2 F=-3,2 N	9) F=-2000 N

Unidad 1. Ficha 10: Ejercicios de estática y presión.

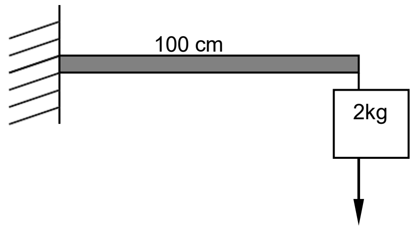
1.- Indica si el cuerpo de la figura se encuentra en equilibrio:

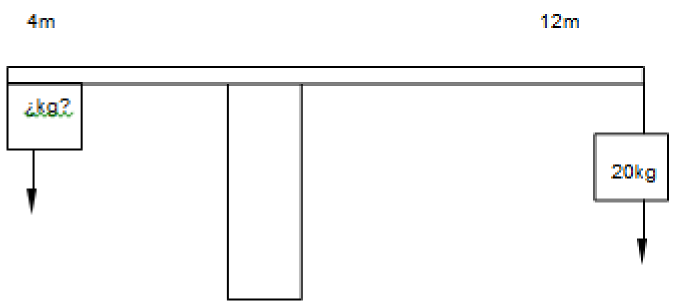


2.- En un extremo de una barra de 1,5 m se aplican dos fuerzas de 12 N y 4 N. Calcula el momento resultante sobre la misma.

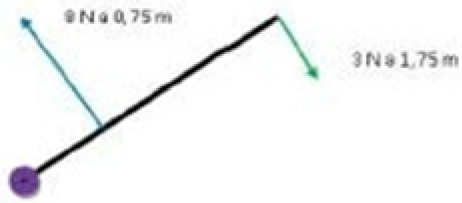
3.- Indicar con que fuerza atrae a un cuerpo de masa 2 kg la tierra.

4.- En una barra empotrada en la pared de longitud 100 cm, se cuelga el peso del ejercicio anterior. Indicar cuál será el momento respecto del punto de apoyo de la pared.





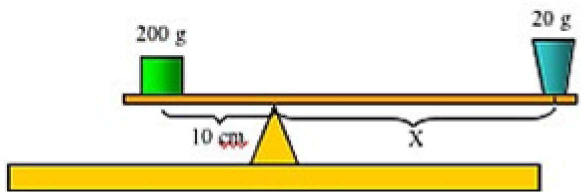
5.- Una grúa tiene una pluma de 12 m y parte de contrapeso de 4 m, indicar cuál debe ser el valor del contrapeso si la carga que debe soportar la pluma en su extremo es de 20 kg.



6.- Indica que le sucederá a la barra si aplicamos esas dos fuerzas que aparecen en la imagen.

7.- La presión máxima que puede soportar una superficie es 1.470 pascales. Indica si soportaría el peso de un niño de 40 kg de masa que se apoya sobre una superficie de 0,30 m^2, y el de una foca de 300 kg que está apoyada sobre una superficie de 1 m^2.

8.- Calcula la longitud del segundo brazo para que la balanza este en equilibrio.

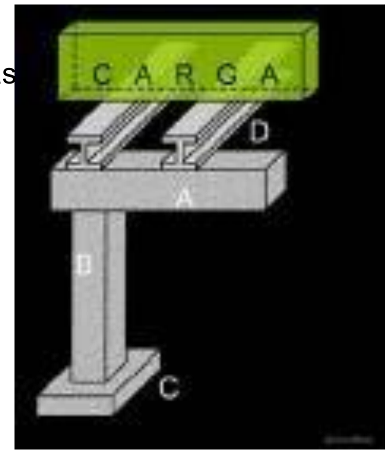


9. Calcular el valor del momento de un par de fuerzas cuya intensidad es 5 N si el brazo del par mide 2 m.

Soluciones							
1) Si	2) 12 N·m	3) 19,6 N	4) 19,6 N·m	5) 60 kg	6) Gira en contra	7) Si. No	8) 100 cm
9) 10 Nm							

Unidad 1: Ficha 11: Estructuras

1.- Calcula la tensión que soporta una barra prismática con sección cuadrada de 10 cm sobre la que actúa un esfuerzo de compresión de 10.000 Kg.



2.- Un pilar cilíndrico de radio 20 cm soporta una masa de 120 toneladas. ¿Cuál será su tensión de trabajo? ¿Qué tipo de esfuerzo soporta? Si la tensión admisible es de 50 kgf/cm^2, ¿trabaja dentro de los márgenes de seguridad?

3.- Identifica en el siguiente dibujo los elementos:

4.- De un muelle se cuelgan diferentes pesos, obteniéndose los siguientes valores: Peso 100 N, longitud del muelle 20 cm.

Peso 200 N, longitud 40 cm.

Peso 300 N, longitud 60 cm.

Peso 400 N, longitud 80 cm.

Representa los valores en una tabla y calcula el valor de la constante de elasticidad del muelle.

5.- Un muelle tiene una constante de elasticidad de 100 N/m. ¿Cuánto peso deberíamos colgar de él para que se estirase 30 cm?

6.- Dos muelles diferentes tienen de constantes respectivamente k1=60 N/cm y k2=80 N/cm. Nos interesa un muelle que se deforme poco al colgar de él un peso. ¿Con cuál de ellos nos quedaríamos?

7.- Cuando tiramos de un muelle con una fuerza de 20 N, se estira 2 cm. Si a continuación soltamos y contamos las oscilaciones del muelle, observamos que en 5 segundos ha oscilado 40 veces. Con estos datos, calcula la constante de elasticidad del muelle y la frecuencia de oscilación de su movimiento.

8.- Un cable cilíndrico de acero tiene una tensión de rotura de 410 N/mm2. Su diámetro es de 2mm. ¿Qué esfuerzo de tracción máximo soportará? Indica el resultado en kgf.

Soluciones				
1) 100 Kgf/cm^2	2) 95,55 kgf/cm^2	3)	4) 5 N/cm	5) 30 N
6) El segundo	7) 10 N/cm; 8 Hz	8) 131,43 kgf		